

Annexe A

Compléments sur les intégrateurs

Introduction

Dans cette annexe, nous présentons des calculs et résultats complémentaires au chapitre 2 sur les intégrateurs symplectiques. Les applications de transfert des éléments principaux d'un accélérateur sont présentées pour d'autres approximations. Les équations du mouvement de la section droite sont nonlinéaires du fait du caractère relativiste des particules ; elles peuvent être intégrées sans aucune approximation en coordonnées rectangulaires (section A.1) ou curvilignes (section A.3). Les équations du mouvement pour un élément dipolaire sont intégrées en conservant la racine carrée du terme cinématique en coordonnées curvilignes (section A.2.1) ou rectangulaires (section A.2.2), l'expression de l'application de transfert des coins dipolaires en est ensuite déduite (section A.2.3). L'application de transfert du dipôle est présentée (section A.2.4), celle du dipôle simple avec le terme *des petites machines* (section A.2.6). Enfin, nous présentons la modélisation symplectique du déplacement ou de la rotation d'un élément magnétique (section A.3). Ces résultats sont pour la plupart issus des travaux de A.J. Dragt et E. Forest.

A.1 Intégration exacte d'une section droite

La section droite de longueur L peut être intégrée sans aucune approximation en coordonnées rectangulaires ou curvilignes. Ces résultats permettront de pouvoir de vérifier la validité des approximations réalisées, *i.e.* le développement Taylor usuel de la racine carrée.

Hamiltonien : Son expression est rappelée en coordonnées rectangulaires (cf. Eq. 1.35 p. 12 avec $\hat{A}_s = 0$ et $h = 0$) :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = -\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (\text{A.1})$$

avec pour équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, & \frac{dp_x}{ds} = 0 \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, & \frac{dp_y}{ds} = 0 \\ \frac{dl}{ds} = -\frac{1+\delta}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}}, & \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Intégration des équations : Les variables (x, y, l) sont encore cycliques, et l'on obtient :

$$\begin{cases} x^f = x^i + \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} s, & p_x^f = p_x^i \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} s, & p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i - \frac{1+\delta}{\sqrt{(1+\delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} s, & \delta^f = \delta \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

avec $s = L$ la longueur de la section droite.

A.2 Intégration d'un dipôle

A.2.1 Aimant secteur exact

J'ai annoncé page 39, que le dipôle est complètement intégrable. Le but de section est de le montrer. Les équations sont toujours exprimées en fonctions des variables canoniques $(x, p_x, y, p_y, \delta, l)$.

Description et Hamiltonien : Pour la présente annexe, le dipôle est décrit en introduisant le coefficient b_1 qui dans la majorité des cas est égal à la courbure h (Forest *et al.*, 1994). Cette expression est néanmoins utile pour déduire l'expression d'une rotation en géométrie curviligne (cf. *infra*). Le Hamiltonien retenu est celui établi page 12 avec le potentiel vecteur donné par la formule 1.51 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = -(1 + hx) \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} + b_1 x + b_1 h \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.4})$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{dx}{ds} = p_x \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{dy}{ds} = p_y \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} \quad (\text{A.5b})$$

$$\frac{dl}{ds} = -(1 + \delta) \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}} \quad (\text{A.5c})$$

$$\frac{dp_x}{ds} = h \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} - b_1(1 + hx) \quad (\text{A.5d})$$

$$\frac{dp_y}{ds} = 0 \quad (\text{A.5e})$$

$$\frac{d\delta}{ds} = 0 \quad (\text{A.5f})$$

Hypothèse de calcul : La seule hypothèse est l'approximation *hard-edge*. Le Hamiltonien A.4 est complètement intégrable.

Intégration exacte : Les variables y et l sont cycliques, donc leurs moments conjugués respectifs sont constants :

$$\boxed{p_y^f = p_y^i} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta^f = \delta^i = \delta} \quad (\text{A.6})$$

L'intégration des autres variables se fait par étapes successives. On commence par l'équation différentielle de $y(s)$ en utilisant les expressions (Eq. A.5d) puis (Eq. A.5b) :

$$\begin{aligned} dp_x &= h \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2} ds - b_1(1 + hx) ds \\ &= \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2} \left(h ds - \frac{b_1}{p_y^i} dy \right) \\ y^f &= y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \int \frac{dp_x}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} + \frac{p_y^i}{b_1} \int h ds \\ &\boxed{y^f = y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{p_y^i h}{b_1} s} \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

en utilisant la primitive usuelle :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \arcsin \frac{t}{|a|} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

On déduit alors la solution pour $l(s)$ en comparant les équations A.5b et A.5c :

$$\boxed{l^f = l^i + \frac{(1 + \delta)}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{(1 + \delta)h}{b_1} s} \quad (\text{A.8})$$

L'équation différentielle A.5d pour $p_x(s)$ s'intègre en se servant des expressions A.5a et A.5c :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_x}{ds^2} &= -h p_x \frac{dp_x}{ds} \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} - b_1 h \frac{dx}{ds} \\ &= -h \frac{p_x}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} \left[h \sqrt{(1 + \delta)^2 + p_x^2 - (p_y^i)^2} - b_1(1 + hx) \right] \\ &\quad + b_1 h p_x \frac{1 + hx}{\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - (p_y^i)^2}} \end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\frac{d^2 p_x}{ds^2} = -h^2 p_x^2 \Rightarrow p_x = a \cos(hs) + b \sin(hs)$$

où les constantes a et b sont déterminées en fonction des conditions initiales, soit :

$$\boxed{p_x^f = p_x^i \cos(hs) + \left(\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} - b_1(h^{-1} + x^i) \right) \sin(hs)} \quad (\text{A.9})$$

L'intégration de la dernière équation ($x(s)$) est alors immédiate :

$$\begin{aligned} \frac{dp_x^f}{ds} &= h \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} - b_1(h^{-1} + x^f) \\ \boxed{x^f = \frac{1}{hb_1} \left(h \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} - \frac{dp_x^f}{ds} - b_1 \right)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.2.2 Aimant dipolaire en coordonnées rectangulaires

Hamiltonien et description : Il est également possible d'exprimer l'application de transfert en géométrie cartésienne. Le Hamiltonien est alors le même que celui en géométrie curviligne (cf. Eq. A.4) avec $h \rightarrow 0$:

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = -\sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} + b_1 x \quad (\text{A.11})$$

Hypothèse de calcul : La seule hypothèse est l'approximation *hard-edge*. Le Hamiltonien A.11 est complètement intégrable.

Intégration des équations : L'expression des solutions s'obtient à partir des celles de l'aimant secteur (Eq. A.6 à A.10) en prenant la limite $h \rightarrow 0$ (Forest, 1994) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^f = x^i + \frac{1}{b_1} \left(\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} - \sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} \right) \\ p_x^f = p_x^i - b_1 s \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] \\ p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i + \frac{(1+\delta)}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] \\ \delta^f = \delta \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

avec $s = L$ et généralement $b_1 = h$.

A.2.3 Coin dipolaire

Description : Les applications de transfert du dipôle exprimées en géométrie curviligne, notée \mathcal{D}_{curv} et en géométrie cartésienne, notée \mathcal{D}_{cart} , sont reliées entre elles par l'ajout de l'application de chaque coin du dipôle notée $\mathcal{C} \left(\frac{\theta}{2} \right)$ (cf. Fig. 2.2 p. 40) :

$$\mathcal{D}_{curv} = \mathcal{C} \left(\frac{\theta}{2} \right) \mathcal{D}_{cart} \mathcal{C} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

Application de transfert : En fait, l'application de transfert d'un coin dipolaire est juste le cas limite de celle d'un dipôle secteur en géométrie curviligne (Forest, 1998, p. 368) : $h \rightarrow +\infty$, $s \rightarrow 0$ et $sh = \theta$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^f = x^i \cos \theta + \frac{1}{b_1} \left(\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2} + p_x^i \sin \theta - \sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} \cos \theta \right) \\ p_x^f = p_x^i \cos \theta + \left(\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_x^i)^2 - (p_y^i)^2} - b_1 x^i \right) \sin \theta \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{p_y^i}{b_1} \theta \\ p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i + \frac{(1+\delta)}{b_1} \left[\arcsin \frac{p_x^i}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} - \arcsin \frac{p_x^f}{\sqrt{(1+\delta)^2 - (p_y^i)^2}} \right] + \frac{(1+\delta)}{b_1} \theta \\ \delta^f = \delta \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

A.2.4 Dipôle combiné sans terme petite machine

Description et Hamiltonien : Dans cette partie, nous considérons un dipôle combiné de gradient quadripolaire b_2 , de courbure h et de longueur L . Son Hamiltonien développé à

l'ordre deux en les impulsions est (cf. Eq. 2.41) :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - h\delta x + (b_2 + h^2)\frac{x^2}{2} - b_2 y^2 \quad (\text{A.15})$$

Les équations du mouvement (l est cyclique) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1+\delta}, & \frac{dp_x}{ds} = h\delta - (b_2 + h^2)x \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1+\delta}, & \frac{dp_y}{ds} = b_2 y \\ \frac{dl}{ds} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)^2} + hx, & \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Hypothèses de calcul : Les approximations (a) des grandes machines, (b) des petits angles et (c) *hard-edge* ont été faites pour établir l'expression A.15 qui est complètement intégrable.

Application de transfert : Si l'on ne considère que les équations horizontales, on obtient une équation différentielle du second ordre de type oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{1 + \delta} \frac{dp_x}{ds} = \frac{\delta h}{1 + \delta} - \frac{b_2 + h^2}{1 + \delta} x$$

alors :

$$x^f = \begin{cases} \cos(\omega_x^+ s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + (\omega_x^+)^{-1} y^i \sin(\omega_x^+ s) \frac{p_x^i}{1 + \delta} + \frac{\delta h}{b_2 + h^2} & \text{si } (b_2 + h^2) \geq 0 \\ \cosh(\omega_x^- s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + (\omega_x^-)^{-1} y^i \sinh(\omega_x^- s) \frac{p_x^i}{1 + \delta} + \frac{\delta h}{b_2 + h^2} & \text{si } (b_2 + h^2) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

avec $\omega_x^+ = \sqrt{\frac{b_2 + h^2}{1 + \delta}}$ et $\omega_x^- = \sqrt{-\frac{b_2 + h^2}{1 + \delta}}$

$$p_x^f = \begin{cases} -(1 + \delta) \omega_x^+ \sin(\omega_x^+ s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + \cos(\omega_x^+ s) p_x^i & \text{si } (b_2 + h^2) \geq 0 \\ (1 + \delta) \omega_x^- \sinh(\omega_x^- s) \left(x^i - \frac{\delta h}{b_2 + h^2}\right) + \cosh(\omega_x^- s) p_x^i & \text{si } (b_2 + h^2) < 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Les équations verticales donne l'équation différentielle d'un oscillateur :

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{1 + \delta} \frac{dp_y}{ds} = \frac{b_2}{1 + \delta} y$$

alors :

$$y^f = \begin{cases} \cos(\omega_y^+ s) y^i + (\omega_y^+)^{-1} \sin(\omega_y^+ s) \frac{p_y^i}{1 + \delta} & \text{avec } \omega_y^+ = \sqrt{\frac{-b_2}{1 + \delta}} \text{ si } b_2 < 0 \\ \cosh(\omega_y^- s) y^i + (\omega_y^-)^{-1} \sinh(\omega_y^- s) \frac{p_y^i}{1 + \delta} & \text{avec } \omega_y^- = \sqrt{\frac{b_2}{1 + \delta}} \text{ si } b_2 > 0 \\ y^i + \frac{p_y^i}{1 + \delta} s & \text{si } b_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

et :

$$p_y^f = \begin{cases} -(1 + \delta) \omega_y \sin(\omega_y s) y^i + \cos(\omega_y s) p_y^i & \text{si } b_2 < 0 \\ (1 + \delta) \omega_y \sinh(\omega_y s) y^i + \cosh(\omega_y s) p_y^i & \text{si } b_2 > 0 \\ p_y^i & \text{si } b_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

J'attire l'attention du lecteur sur le fait que ces équations nécessitent une programmation plus complexe que pour l'utilisation d'un schéma symplectique. Le temps de calcul est pénalisé par les branchements correspondant aux différents cas.

A.2.5 Dipôle droit en coordonnées rectangulaires

Hamiltonien : son expression est obtenue en posant $h = 0$ dans le Hamiltonien 1.36 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + b_1 x - hx(1 + \delta) \quad (\text{A.21})$$

avec b_1 la force dipolaire.

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1+\delta} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1+\delta} \\ \frac{dl}{ds} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)^2} + hx \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{ds} = -(b_1 - h(1 + \delta)) \\ \frac{dp_y}{ds} = 0 \\ \frac{d\delta}{ds} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Hypothèses de calcul : Les approximations (a) des grandes machines, (b) des petits angles et (c) *hard-edge* ont été faites pour établir l'expression A.22 qui est complètement intégrable.

Application de transfert : L'intégration des équations du mouvement est immédiate :

$$\begin{cases} x^f = x^i + \frac{p_x^i}{1+\delta} s - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1}{1+\delta} - h \right) s^2 \\ p_x^f = p_x^i - (b_1 - h(1 + \delta)) s \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i}{1+\delta} s \\ p_y^f = p_y^i \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

A.2.6 Dipôle avec terme petite machine

Description et Hamiltonien : Pour les machines à faible rayon de courbure comme Super-ACO, le terme hexapolaire $hx \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)}$ dit *des petites machines* ne peut plus être négligé. En particulier, il doit être pris en compte pour les calculs de chromaticité. Le Hamiltonien d'un dipôle simple est obtenu à partir des équations 1.36 et 1.51 :

$$\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta) = \underbrace{(1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}}_{A(x, p_x, p_y, \delta)} - \underbrace{h\delta x + h^2 \frac{x^2}{2}}_{B(x)}$$

Je vais maintenant présenter un schéma d'intégration symplectique avec correcteur.

Hypothèses de calcul : (a) l'approximation des petits angles et (b) *hard-edge* sont réalisées pour établir cet Hamiltonien.

A.2.6.1 Intégration de A

Les équations du mouvement se réduisent à (y et δ sont cycliques) :

$$\frac{dx}{ds} = (1 + hx) \frac{p_x}{1 + \delta} \qquad \frac{dp_x}{ds} = -h \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} + h\delta \qquad (\text{A.24a})$$

$$\frac{dy}{ds} = (1 + hx) \frac{p_y}{1 + \delta} \qquad \frac{dp_y}{ds} = 0 \qquad (\text{A.24b})$$

$$\frac{dl}{ds} = -(1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)^2} - hx \qquad \frac{d\delta}{ds} = 0 \qquad (\text{A.24c})$$

On a immédiatement $\boxed{p_y^f = p_y^i}$, puis pour p_x (Eq. A.24a) :

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{ds} &= -h \frac{p_x^2 + a^2}{2(1 + \delta)} \quad \text{avec} \quad a^2 = (p_y^i)^2 - 2(1 + \delta)\delta > 0 \\ \int \frac{dp_x}{p_x^2 + a^2} &= \int -\frac{h}{2(1 + \delta)} ds \end{aligned}$$

en utilisant la primitive usuelle :

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

on a alors :

$$\arctan \frac{p_x^f}{a} = \arctan \frac{p_x^i}{a} - \frac{ah}{2(1 + \delta)} s$$

en utilisant :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

on obtient :

$$\boxed{p_x^f = a \left[\frac{p_x^i - a \tan \theta}{a + p_x^i \tan \theta} \right]} \qquad (\text{A.25})$$

avec $\theta = \frac{ah}{2(1 + \delta)} s$ et $a^2 = (p_y^i)^2 - 2(1 + \delta)\delta > 0$.

L'équation A.24a pour x peut être maintenant intégrée :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + hx} &= \int \frac{p_x}{1 + \delta} ds \\ \frac{1}{h} \ln |1 + hx| &= \frac{a}{A + \delta} \int \tan(C - \theta) ds \quad \text{avec} \quad \tan C = \frac{p_x^i}{a} \\ \ln |1 + hx| &= 2 \ln |\cos(C - \theta)| + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Après passage à l'exponentielle, en développant le cosinus et en utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\boxed{(1 + hx^f) = (1 + hx^i) \left(\cos \theta + \frac{p_x^i}{a} \sin \theta \right)^2} \quad (\text{A.26})$$

La dernière équation s'intègre alors immédiatement :

$$\boxed{y^f = y^i + \left(1 + \left(\frac{p_x^i}{a} \right)^2 \right) (h^{-1} + x^i) \left[\theta - \sin \theta \cos \left(\theta - 2 \arctan \frac{p_x^i}{a} \right) \right]} \quad (\text{A.27})$$

Dans le cas $a^2 < 0$, les équations A.25 à A.27 deviennent :

$$|1 + hx^f| = \begin{cases} |1 + hx^i| \frac{C^+}{(1+C^+)^2} \frac{(u^++1)^2}{u^+} & \text{si } p_x \in]-|a|, |a|[\\ |1 + hx^i| \frac{C^-}{(1-C^-)^2} \frac{(u^- - 1)^2}{u^-} & \text{si } p_x \notin]-|a|, |a|[\end{cases} \quad (\text{A.28})$$

$$p_x^f = \begin{cases} a \frac{u^+ - 1}{1 + u^+} & \text{si } p_x \in]-|a|, |a|[\\ a \frac{1 + u^-}{u^- - 1} & \text{si } p_x \notin]-|a|, |a|[\end{cases} \quad (\text{A.29})$$

$$y^f = \begin{cases} y^i + \frac{p_y^i}{ah} |1 + hx^i| \frac{C^+}{(1+C^+)^2} \left[u^+ - C^+ - \frac{1}{u^+} + \frac{1}{C^+} + 2 \ln \left| \frac{u^+}{C^+} \right| \right] & \text{si } p_x \in]-|a|, |a|[\\ y^i + \frac{p_y^i}{ah} |1 + hx^i| \frac{C^-}{(1-C^-)^2} \left[u^- - C^- - \frac{1}{u^-} + \frac{1}{C^-} - 2 \ln \left| \frac{u^-}{C^-} \right| \right] & \text{si } p_x \notin]-|a|, |a|[\end{cases} \quad (\text{A.30})$$

avec $C^\pm = \pm \frac{p_x^i + a}{a - p_x^i}$, $a^2 = -((p_y^i)^2 - 2(1 + \delta)\delta)$, $\theta = \frac{ah}{2(1+\delta)}s$ et $u^\pm = C^\pm e^{2\theta s}$.

A.2.6.2 Intégration de B

Il n'y a qu'une seule équation à intégrer, car toutes les autres variables canoniques sont des constantes du mouvement :

$$\frac{dp_x}{ds} = -b_1 x^2 \quad \Rightarrow \quad p_x^f = p_x^i - h x^2 s \quad (\text{A.31})$$

A.2.6.3 Calcul du correcteur

Le calcul du correcteur est relativement aisé, il s'exprime par :

$$\{\{A, B\}, B\} = h^4 \frac{1 + hx}{1 + \delta} x^2 \quad (\text{A.32})$$

On obtient alors l'application recherchée :

$$e^{sL_{\{\{A, B\}, B\}}} : \begin{cases} x^f & = x^i \\ y^f & = y^i \end{cases} \quad \begin{cases} p_x^f & = p_x^i - h^4 \frac{2+3hx^i}{1+\delta} x^i s \\ p_y^f & = p_y^i \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

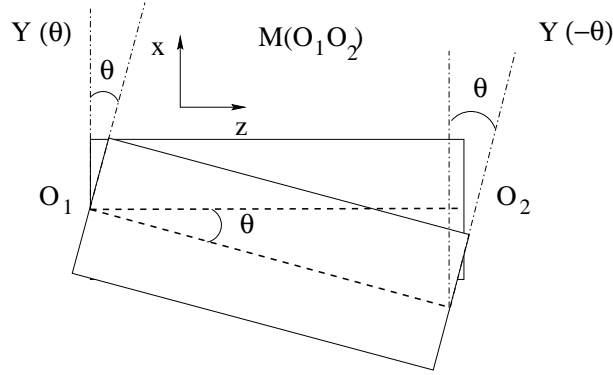


FIG. A.1: Schéma illustrant la rotation d'un angle θ d'un élément rectiligne — inspiré de Forest, 1998 —

A.3 Déplacements et rotations d'un élément

Un élément magnétique peut dévier de son emplacement théorique en position $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ et en moments $(\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_s)$. En suivant l'approche développée par Forest et Hirata (1992), ces défauts peuvent se modéliser de manière extrêmement simple.

Par exemple, le schéma A.1 illustre la rotation d'un angle θ d'un élément dans le plan x-z. L'application de transfert de l'élément tourné, notée \mathcal{M}_{R_y} , est obtenue comme la composition de trois applications de base¹ (Forest, 1998, chapitre 10) :

$$\mathcal{M}_{R_y} = \mathcal{Y}(\theta)\mathcal{M}\mathcal{Y}(-\theta) \quad (\text{A.34})$$

où \mathcal{M} est l'application de transfert de l'élément et $\mathcal{Y}(\theta)$ l'application décrivant une rotation d'axe y et d'angle θ .

L'application $\mathcal{Y}(\theta)$ peut être considérée comme une rotation de générateur xp_z , soit (*op. cit.*) :

$$\mathcal{Y}(\theta) = \exp(\theta L_{xp_z}) \quad (\text{A.35})$$

avec $p_z = \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2}$ et L la dérivée de Lie.

L'évaluation de l'opérateur A.35 est obtenue en posant $b_1 = 0$ dans le cas du dipôle exact en géométrie curviligne (Eq. A.6 à A.10), dit différemment elle correspond à l'application de transfert d'une section droite exprimée en géométrie curviligne. Cette application a été introduite la première fois par Dragt (1982) :

$$\begin{cases} x^f = \frac{x^i}{\cos \theta \left(1 - \frac{p_x^i \tan \theta}{p_z}\right)}, & p_x^f = p_x^i \cos \theta + p_z \sin \theta \\ y^f = y^i + \frac{p_y^i x^i \tan \theta}{p_z \left(1 - \frac{p_x^i \tan \theta}{p_z}\right)}, & p_y^f = p_y^i \\ l^f = l^i + \frac{(1 + \delta)x^i \tan \theta}{p_z \left(1 - \frac{p_x^i \tan \theta}{p_z}\right)}, & \delta^f = \delta \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

avec $p_z = \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x^f)^2 - (p_y^i)^2}$. On remarquera que les applications A.36 et A.14 sont identiques.

¹Mathématiquement, on fait un changement de bases.

Une rotation d'axe x serait modélisée par l'opérateur $\mathcal{X}(\theta) = \exp(\theta L_{ypz})$. L'application résultante est la même que celle obtenue pour $\mathcal{Y}(\theta)$ en inversant les rôles de x et y , et de p_x et p_y dans les formules A.36. Enfin, une rotation d'axe z a pour générateur $xp_y - yp_x$, donc $\mathcal{Z}(\theta) = \exp(\theta L_{xp_y - yp_x})$.

De manière similaire pour un défaut d'alignement horizontal d , l'application de transfert \mathcal{M}_{T_y} d'un élément sera modélisée par la composition de trois applications comme (Forest, 1998, chapitre 10) :

$$\mathcal{M}_{T_y} = \mathcal{T}_x(d)\mathcal{M}\mathcal{T}_x(-d) \quad (\text{A.37})$$

avec $\mathcal{T}_x(d)$ l'opérateur de translation dont le générateur est p_x :

$$\mathcal{T}_x(d) = \exp(dL_{p_x}), \quad (\text{A.38})$$

et \mathcal{M} est l'application de transfert de l'élément parfait.

Les translations verticale et longitudinale ont pour générateurs respectivement p_y et p_z , soit :

$$\mathcal{T}_y(d) = \exp(dL_{p_y}), \quad (\text{A.39})$$

$$\mathcal{T}_z(d) = \exp(dL_{p_z}), \quad (\text{A.40})$$

Annexe B

Figures en couleur

Introduction

Dans cette annexe, nous présentons les cartes en fréquence et ouvertures dynamiques des quatre machines étudiées : SOLEIL (section B.1), Super-ACO (section B.2), l'ESRF (section B.3) et l'ALS (section B.4). Ce sont les mêmes figures que celles en noir et blanc déjà présentées dans le corps de ce mémoire. La diffusion est ici codée suivant une échelle logarithmique de couleur allant du bleu pour une diffusion quasi nulle au rouge pour une diffusion élevée.

Nous rappelons l'expression de l'indice de diffusion utilisé, noté D :

$$D = \log_{10} \left(\sqrt{\left(\nu_x^{(2)} - \nu_x^{(1)}\right)^2 + \left(\nu_y^{(2)} - \nu_y^{(1)}\right)^2} \right)$$

où $\nu_x^{(1)}$ et $\nu_y^{(1)}$ sont les nombres d'ondes calculés sur les N premiers tours de machine et $\nu_x^{(2)}$ et $\nu_y^{(2)}$ ceux calculés pour les N tours suivants.

- Pour une orbite régulière, la diffusion sera quasi-nulle (couleur bleu);
- Au voisinage d'une résonance, la diffusion est plus élevée. La particule a tendance à osciller transversalement (couleur jaune-orange);
- Pour une orbite nonlinéaire voire chaotique, la diffusion est élevée (couleur rouge). Si l'intégration était plus longue, la particule serait perdue rapidement.

Le codage de la diffusion en couleur va faciliter la localisation des résonances dans l'ouverture dynamique : en particulier les régions hyperboliques où la diffusion est élevée vont être mises en exergue.

B.1 Le projet SOLEIL

Nous présentons les cartes en fréquence et ouvertures dynamiques pour l'optique faible émittance numéro 1 (Fig. B.1) et l'optique faible émittance numéro 1 modifiée (Fig. B.2). Le point de fonctionnement est $(\nu_x, \nu_y) = (18.28, 8.38)$, les chromaticités naturelles sont parfaitement compensées.

Pour le premier cas, la dynamique est marquée par la résonance d'ordre $7,5\nu_x + 2\nu_y - 4 \times 27 = 0$, qui est atteinte pour $x = 24$ mm (cf. Fig. B.1). A faible amplitude, la diffusion est faible (vert), le mouvement est quasipériodique et régulier. A grande amplitude, la dynamique est perturbée par le nœud avec la résonance $9\nu_x - 4 \times 41 = 0$: les largeurs de résonances se superposent, le mouvement est chaotique avec une diffusion élevée (orange-rouge).

Le second cas a été optimisé de manière à éviter les résonances précédentes. A ces fins, les forces des hexapôles ont été modifiées : l'objectif est atteint (cf. Fig. B.2). La carte en fréquence est en contrepartie repliée sur elle-même, les dimensions de l'ouverture dynamiques sont similaires au réglage précédent avec une diffusion plus faible.

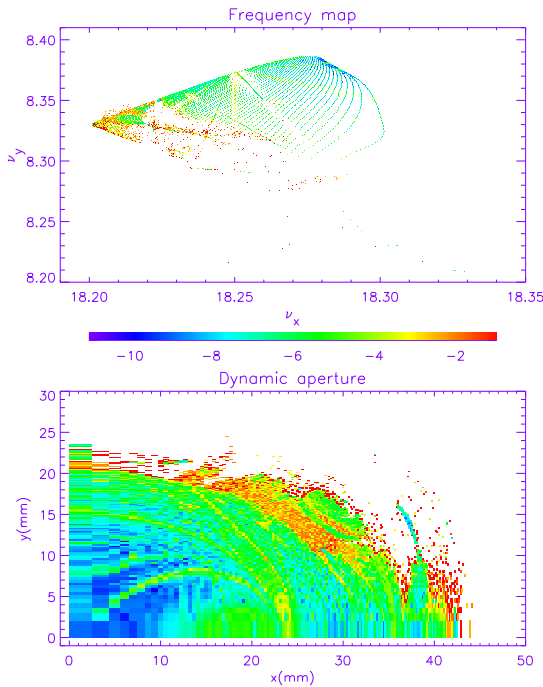


FIG. B.1: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) de l'optique faible émittance numéro 1 de SOLEIL ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m). L'ouverture dynamique est grande. Elle est marquée par les résonances; en particulier, la protubérance observée vers $x = 38$ mm correspond à la résonance d'ordre 9. La diffusion est faible au voisinage du point de fonctionnement (vert), plus importante au voisinage des résonances et élevée sur le bord de l'ouverture dynamique (rouge).

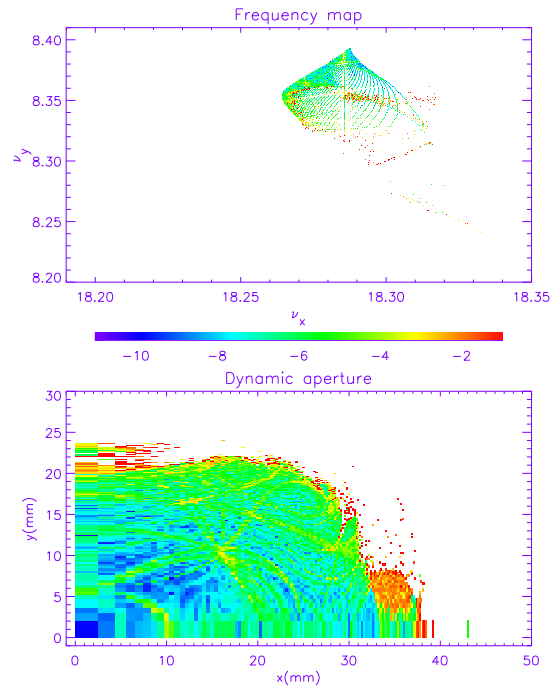


FIG. B.2: Carte en fréquence et ouverture dynamique pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 10$ m et $\beta_y = 8$ m) pour l'optique 1 modifiée de SOLEIL. L'ouverture dynamique est presque aussi grande que pour la première optique; la carte en fréquence est repliée sur elle-même : sa lecture en est rendue plus difficile. Son extension spatiale est réduite, moins de résonances sont rencontrées. La diffusion des orbites est globalement plus faible.

B.2 Super-ACO

B.2.1 Simulations : différents modèles de Super-ACO.

La carte en fréquence de Super-ACO modélisée comme machine idéale est donnée par la figure B.3. Toute la partie pour $\nu_y < 1.60$ n'est pas représentée : elle correspond aux particules qui ont des nombres d'ondes au-delà de la résonance principale $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$ et aux amplitudes $y > 20$ mm dans l'ouverture dynamique. Suivant que l'on trace la carte en fréquence pour le premier ($x > 0, y > 0$) et second ($x < 0, y > 0$) quadrant, la résonance principale est traversée soit selon une région hyperbolique (peu de points en son voisinage cf. Fig. B.3 de gauche), soit selon une région elliptique (cf. Fig. B.3 de droite). Dans ce cas, comme la résonance a une grande largeur, un grand nombre de particules est capturé dans les îles de résonance : sur la carte en fréquence, on observe nettement la droite de résonance ; l'ouverture dynamique est « gonflée » (cf. région $20 < y < 40$ mm et $x > 0$ de l'ouverture dynamique).

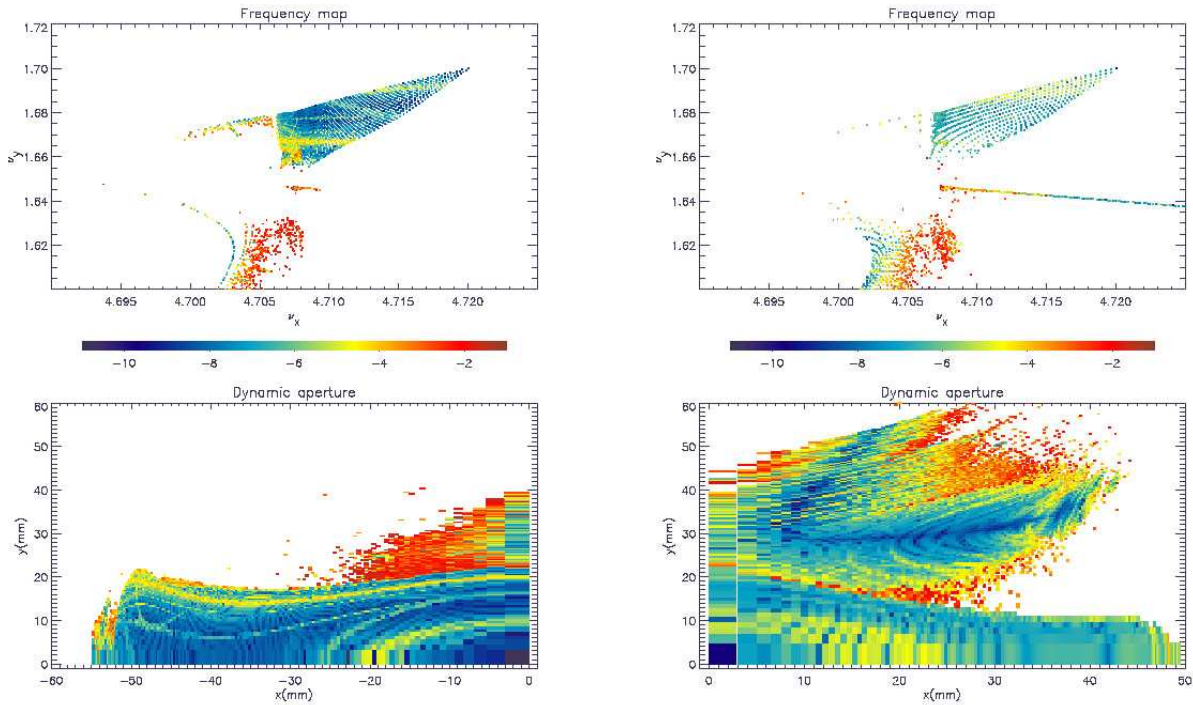


FIG. B.3: Haut : Carte en fréquence tracée pour le premier ($x > 0, y > 0$) et second ($x < 0, y > 0$) quadrant de l'ouverture dynamique. Super-ACO est modélisé comme machine idéale. Bas : Ouverture dynamique associée ($\beta_x = 5.6$ m et $\beta_y = 10.8$ m). Le point de fonctionnement est le coin supérieur droit de la carte (origine de l'ouverture dynamique). La dynamique est principalement dominée par la résonance d'ordre $3(\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0)$ qui donne la limite verticale de l'ouverture dynamique ($y = 20$ mm). Toute la partie $y > 20$ mm sur l'ouverture dynamique correspond à l'île de cette résonance : au centre la diffusion est faible (vert), car les particules sont capturées par la résonance et y restent ; sur les bords (régions hyperboliques) la diffusion est élevée (orange-rouge).

B.2. SUPER-ACO

En incluant dans la modélisation de Super-ACO, les défauts de gradients quadripolaires issus des mesures magnétiques, la dynamique de l’anneau est peu modifiée (cf. Fig. B.4). Globalement, la diffusion est plus élevée, de nouvelles résonances sont excitées ; la symétrie 4 de l’anneau est brisée mais les défauts sont faibles : de l’ordre du pour mille (comparer avec la carte Fig. B.3 de gauche).

Pour le point de fonctionnement nominal, le point de fonctionnement est déplacé de $(\nu_x, \nu_y) = (4.7214, 1.6962)$ à $(\nu_x, \nu_y) = (4.7201, 1.7005)$ et surtout les chromaticités ne sont plus nulles mais surcompensées aux valeurs $\xi_x^{red} = 0.275$ et $\xi_y^{red} = 0.766$. Les forces des quatre familles hexapolaires sont donc complètement modifiées, si bien que la dynamique est complètement différente (cf. Fig. B.5). Le glissement des nombres d’ondes avec l’amplitude est faible : la carte en fréquence est très « compacte » dans l’espace des fréquences, l’ouverture dynamique est réduite de près d’un facteur deux dans le plan horizontal ; elle est limitée par la résonance d’ordre 3, $\nu_x + 2\nu_y - 2 \times 4 = 0$. Expérimentalement, cette résonance est observée mais à plus basse amplitude.

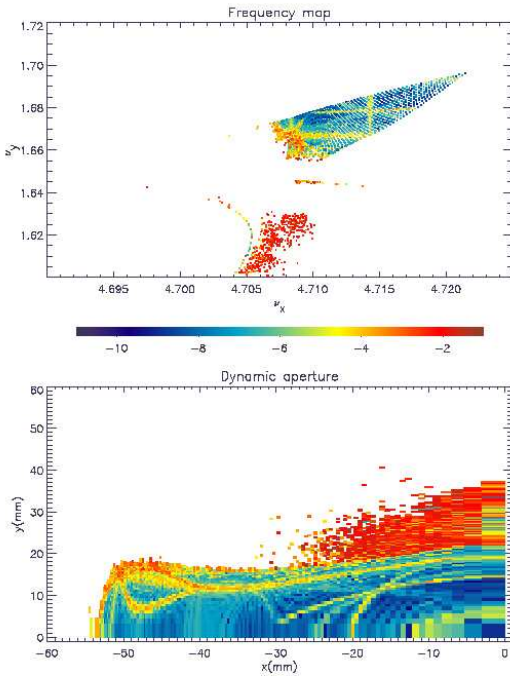


FIG. B.4: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) calculées en incluant dans le modèle de Super-ACO les mesures magnétiques des quadripôles droits ($\beta_x = 5.6$ m et $\beta_y = 10.8$ m). La diffusion est globalement plus élevée, les largeurs de résonances plus grandes. L’influence des défauts magnétiques reste faible (mêmes dimensions de l’ouverture dynamique).

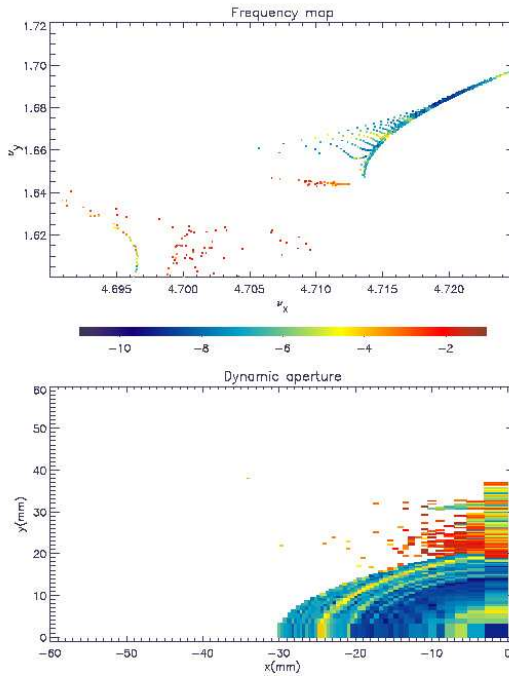


FIG. B.5: Super-ACO deuxième quadrant ($x < 0, y > 0$) : carte en fréquence et ouverture dynamique pour le point de fonctionnement nominal ($\beta_x = 5.5$ m et $\beta_y = 11.5$ m). La carte en fréquence est très compacte : peu de résonances sont rencontrées. Il est difficile de comprendre avec cette modélisation les observations expérimentales.

B.2.2 Expérience : prise en compte des champs de fuite quadripolaires.

Les mesures expérimentales du glissement des nombres d'ondes avec l'amplitude ont permis de mettre en évidence l'influence des champs de fuites des quadripôles de Super-ACO. Cet effet peut être modélisé par un pseudo-octupôle : pour la présente étude, nous avons modifié le modèle de Super-ACO en incluant un octupôle équivalent au milieu de chacun des quadripôles de l'anneau. La dynamique du faisceau est complètement modifiée (comparer les figures B.6 et B.7) : le sens de variation de ν_x avec l'amplitude est inversé, la carte en fréquence ne présente plus de repliement et a avec une grande extension spatiale. Le nombre de résonances est plus élevé mais les largeurs des résonances restent faibles si bien que l'ouverture dynamique est plus grande que sans composante octupolaire.

Lors des mesures expérimentales, il a été possible d'éteindre les familles hexapolaires H1 et H2 tout en conservant le faisceau dans l'anneau. La figure B.8 présente la dynamique associée qui est fortement altérée : la carte en fréquence est modifiée, en particulier le sens de variation de $\nu_x(x)$ (cf. bord droit de la carte B.8 et Fig. B.7) ; de nombreuses résonances sont excitées et principalement la résonance $3\nu_y = 5$; l'ouverture dynamique verticale est réduite de près d'un facteur deux (influence de $3\nu_y = 5$). L'ouverture dynamique horizontale est trois fois plus petite.

Enfin pour simuler la dynamique réelle de l'anneau, nous avons volontairement surestimé l'effet des champs de fuite. Les largeurs de résonances sont alors plus importantes et peuvent se recouvrir surtout à grande amplitude conduisant à des mouvements chaotiques (comparer les figures B.9 et B.7). La diffusion est élevée ; l'ouverture dynamique est constellée de résonances. Une analyse plus détaillée suggère comme nouvelles dimensions : $[-15, 0] \times [0, 6]$ mm, en prenant en compte les résonances. Ces dimensions seraient alors proches de l'expérience.

B.2. SUPER-ACO

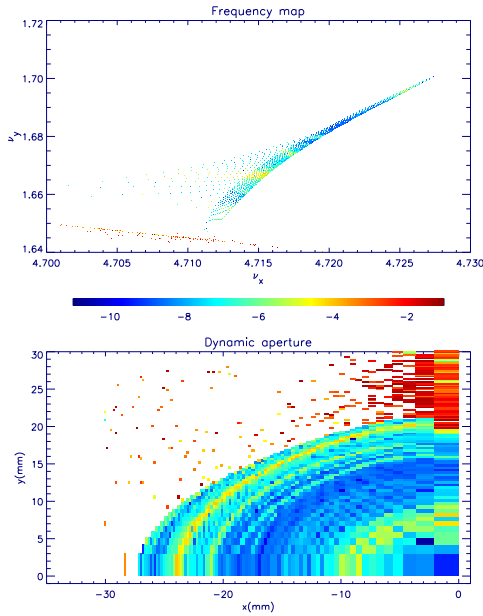


FIG. B.6: Sans composante octupolaire, la carte en fréquence de Super-ACO (haut) est repliée sur elle-même. L'ouverture dynamique (bas) est grande, la dynamique est peu marquée par les résonances.

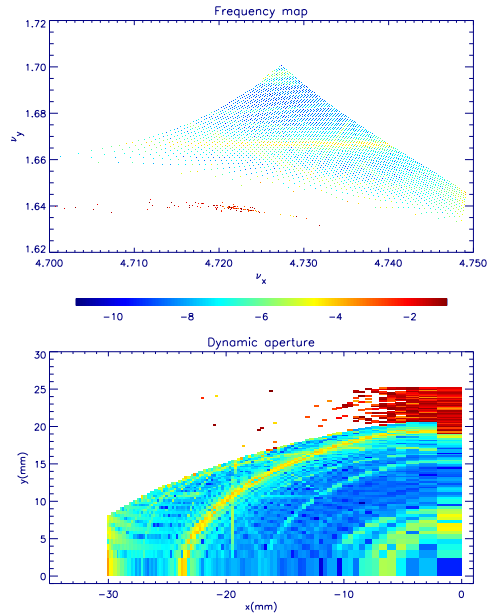


FIG. B.7: Avec composante octupolaire, la dynamique de Super-ACO est complètement modifiée : grande extension spatiale de la carte en fréquence (haut) mais ouverture dynamique (bas) plus grande.

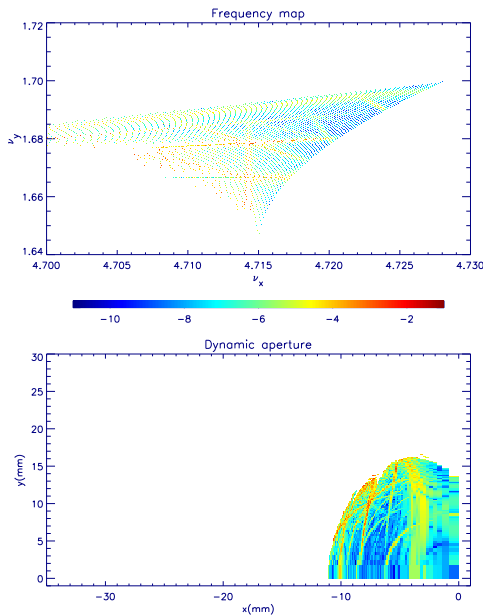


FIG. B.8: Avec composante octupolaire, familles hexapolaires H1 et H2 éteintes : la dynamique de Super-ACO est altérée : carte en fréquence modifiée (haut), ouverture dynamique verticale (bas) réduite de près d'un facteur deux (cf. Fig. B.7).

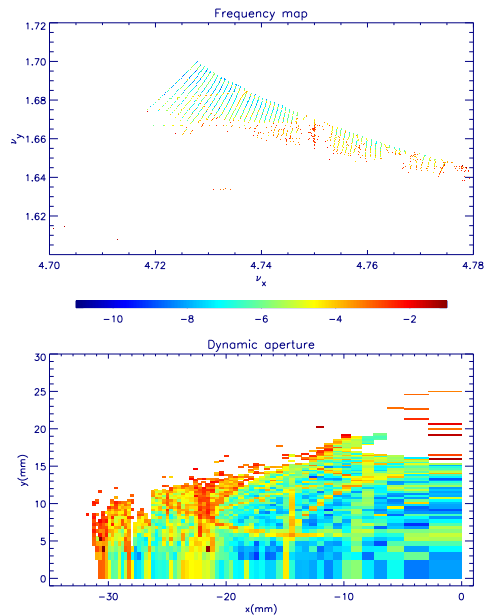


FIG. B.9: Composante octupolaire surestimée : la dynamique de Super-ACO est fortement altérée, carte en fréquence tronquée (haut) avec une grande diffusion et l'ouverture dynamique (bas) réduite dans les deux plans (cf. Fig. B.7).

B.3 L'ESRF : point de fonctionnement nominal

Les deux réglages magnétiques nominaux de l'ESRF ont été étudiés. L'anneau est supposé idéale avec sa 16-périodicité. Le point de fonctionnement est dans les deux cas le même : $(\nu_x, \nu_y) = (36.44, 14.39)$ avec des chromaticités légèrement surcompensées : $\xi_x^{red} = 0.1$ et $\xi_y^{red} = 0.4$. Les deux réglages diffèrent uniquement par la pente à l'origine de la courbe en fréquence $\nu_x(x)$ qui est modifiée en ajustement les forces des hexapôles. Expérimentalement le second réglage semble meilleur à fort courant par paquet en termes de durée de vie (communication personnelle, A. Ropert).

Pour le premier réglage hexapolaire (cf. Fig. B.10), les ouvertures dynamiques et cartes en fréquence ont été tracées pour les deux quadrants ($x < 0, y > 0$) et ($x > 0, y > 0$). L'ouverture dynamique est très grande si l'on ne prend pas en compte les résonances dans l'estimation de ses dimensions.

La dynamique est dominée à faible amplitude par la résonance d'ordre $5, 3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte pour $x = 17$ mm dans l'espace des configurations (et $x = -20$ mm). Elle est traversée suivant une région elliptique pour ($x < 0, y > 0$) : dans l'espace des fréquences, on la voit nettement ; les particules sont capturées dans les îlots de résonance ; sa largeur est grande (cf. désertion de points de chaque côté de la résonance sur la carte en fréquence Fig. B.10 de gauche). Sur l'ouverture dynamique, on observe nettement les régions hyperboliques (jaune-orange) entourant la région elliptique (vert) pour $x = -20$ mm. Dans le quadrant ($x > 0, y > 0$), cette résonance est traversée suivant la région hyperbolique pour $x \approx 16$ mm, la diffusion est plus élevée (cf. Fig. B.11).

À plus grande amplitude, la dynamique est dominée par la résonance entière $\nu_x = 36$. Sa largeur est grande : toutes les particules peuplant l'ouverture dynamique pour $-40 < y < -28$ mm sont capturées par la résonance. Bien que la majorité de ces conditions initiales correspondent au régime elliptique (vert sur l'ouverture dynamique), la résonance entière apparaît avec une grande diffusion sur la carte en fréquence (orange). Cet *artefact* provient simplement de la manière dont la carte en fréquence est tracée : les faibles amplitudes puis les grandes amplitudes (orange).

Pour la machine réelle, cette résonance ne pourra pas être traversée sans réduction importante des performances : en pratique toutes les particules pour $x < -40$ mm (Fig. B.10) et $x > 30$ mm (Fig. B.11), *i.e.* à gauche de la résonance entière seront instables. Une estimation raisonnable des dimensions de l'ouverture dynamique serait : $[-27, 21]_{y=0} \times [-7, 7]_{x=0}$ mm et même : $[-20, 16]_{y=0} \times [-7, 7]_{x=0}$ mm si la résonance d'ordre 5 n'était pas traversée.

Pour le second jeu hexapolaire, l'allure de carte en fréquence est complètement modifiée (cf. Fig. B.10). La diffusion globale est plus faible puisque la résonance entière n'est plus atteinte. La carte en fréquence a une petite extension dans l'espace des fréquences, peu de résonances sont rencontrées. La principale résonance $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte à grande amplitude : $-60 < x < -40$ mm (région elliptique sur Fig. B.11 de gauche) et $x \approx 30$ mm (région hyperbolique sur Fig. B.11 de droite).

B.3. L'ESRF : POINT DE FONCTIONNEMENT NOMINAL

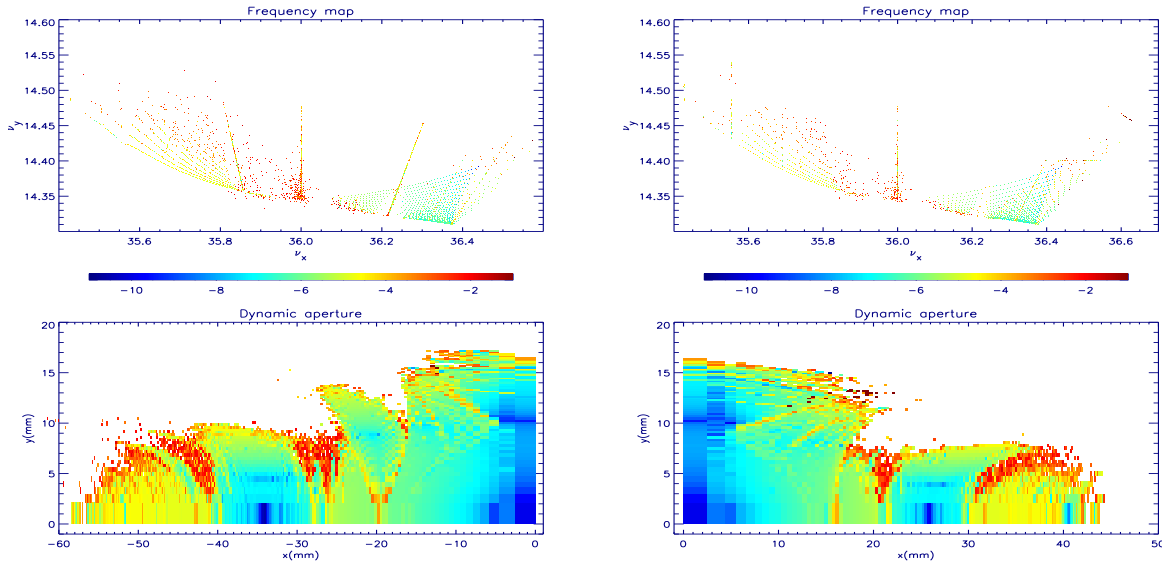


FIG. B.10: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) : premier jeu hexapolaire de l'ESRF pour une surface de section en $s = 0$ ($\beta_x = 35.6 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). La dynamique est dominée par la résonance de couplage $3 : -2 : 0$ et la résonance entière $\nu_x = 36$. Les zones elliptiques et hyperboliques associées sont nettement identifiables sur l'ouverture dynamique.

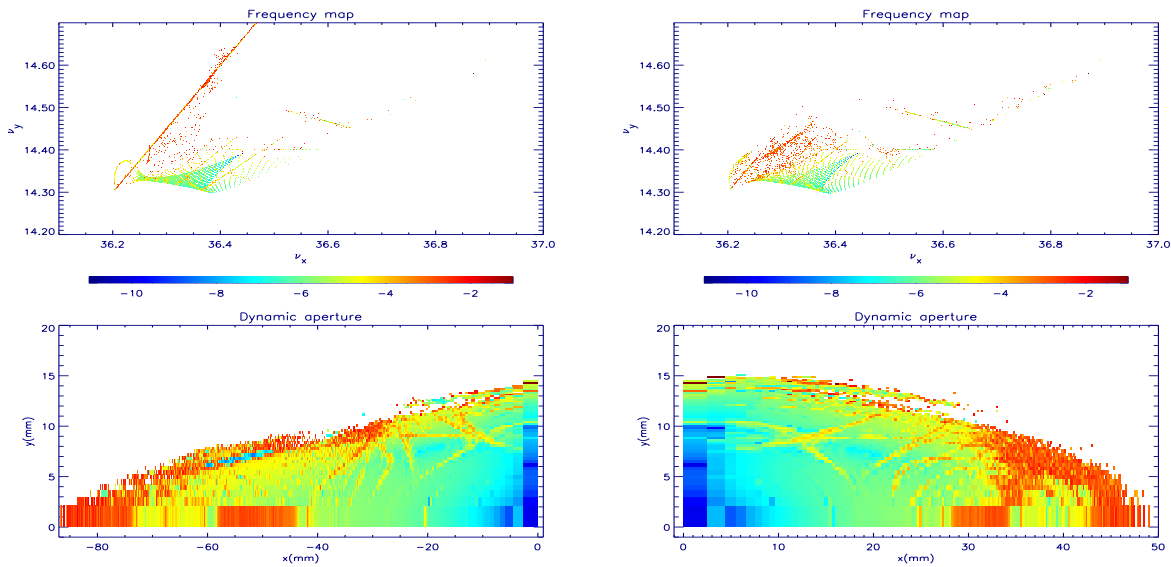


FIG. B.11: Carte en fréquence et ouverture dynamique pour le second réglage de l'ESRF hexapolaire calculée pour une surface de section à $s = 0$ ($\beta_x = 36 m$ et $\beta_y = 2.5 m$). La dynamique est dominée par la résonance $3\nu_x - 2\nu_y - 5 \times 16 = 0$ atteinte à grande amplitude.

B.4 L'ALS

L'Advanced Light Source a été étudiée comme machine parfaite avec sa 12-périodicité. Dans ce cas, l'ouverture dynamique est très grande $[0, 22] \times [0, 10]$ mm (cf. Fig. B.12). De nombreuses résonances sont excitées dont l'identification est facilitée en utilisant la diffusion des orbites (jaune-orange). A grandes amplitudes, les largeurs de résonance se recouvrent conduisant à un mouvement nonlinéaire voire chaotique avec une diffusion élevée (rouge). La dynamique est dominée à grande amplitude par la résonance de couplage $\nu_x - \nu_y - 6 = 0$.

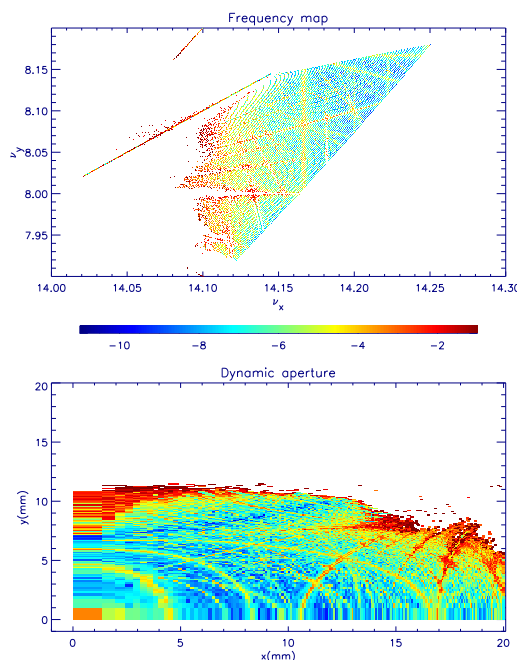


FIG. B.12: Carte en fréquence (haut) et ouverture dynamique (bas) calculées pour une maille parfaite de l'ALS pour une surface de Poincaré en $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). La diffusion permet de nettement distinguer le réseau de résonance sur les deux figures.

Pour obtenir un modèle de l'ALS plus proche des observations expérimentales, nous avons introduit les défauts des quadripôles droits déduits des matrices réponses expérimentales (cf. Fig. B.13), puis ceux des quadripôles tournés pour obtenir un couplage effectif de 1% (cf. Fig. B.14). La 12-périodicité de l'anneau est alors brisée, les largeurs de résonances sont plus grandes. L'ouverture dynamique horizontale (12 mm cf. Fig. B.14) est très proche de celle mesurée en expérience.

Enfin, nous avons obtenu la première carte en fréquence expérimentale d'un accélérateur (cf. Fig. B.15). Elle correspondrait au voisinage du point de fonctionnement de la carte B.14 où la diffusion est faible (vert). Pour cette expérience, le point de fonctionnement a volontairement été déplacé à $(\nu_x = 14.275, \nu_y = 8.167)$. La carte en fréquence expérimentale révèle un réseau de résonances d'ordre 5, $4\nu_x - 57 = 0$, $3\nu_x + 3\nu_y - 67 = 0$, $3\nu_x + 2\nu_y - 59 = 0$ et $2\nu_x + 3\nu_y - 53 = 0$. Au nœud de résonances, la diffusion des particules est élevée (la durée de vie et l'efficacité d'injection sont fortement réduites). L'accord entre l'expérience et la modélisation de l'ALS est remarquable.

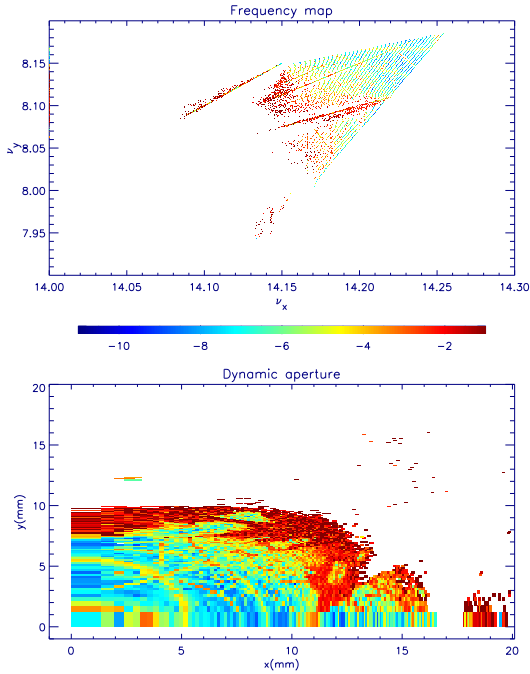


FIG. B.13: Carte en fréquence et ouverture dynamique : maille avec défauts quadripolaires mesurés pour un surface de section en $s = 0$ ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$). La 12-périodicité de l'ALS est brisée, l'extension spatiale de la carte en fréquence est réduite d'un facteur 2 dans le plan vertical.

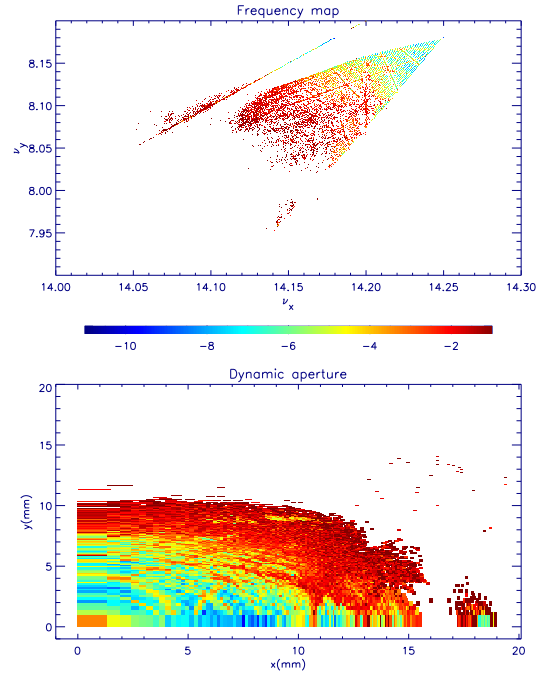


FIG. B.14: Carte en fréquence (a) et ouverture dynamique (b) de l'ALS ($\beta_x = 11.3 m$ et $\beta_y = 4.0 m$) : influence du couplage de 1% ajusté à partir d'une distribution de quadripôles tournés. La diffusion est globalement plus élevée. Seule la région voisine du point de fonctionnement reste régulière.

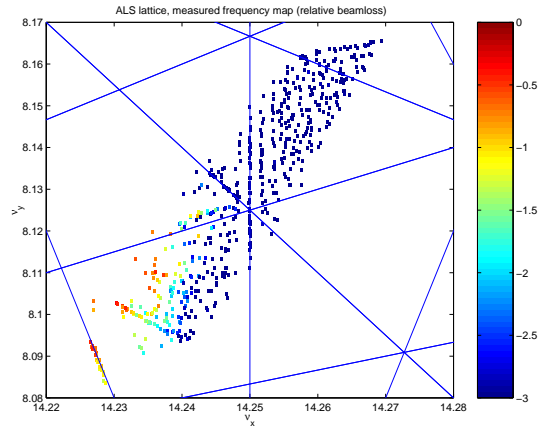
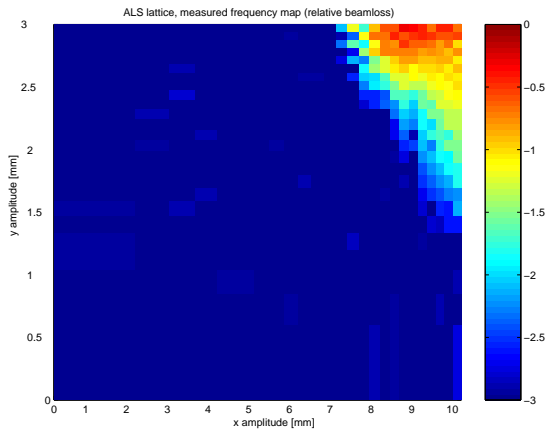


FIG. B.15: Espace des configurations et carte en fréquence expérimentale pour un point de fonctionnement antérieur avec mesure expérimentale de la diffusion des orbites (Steier, Robin, Laskar, Nadolski, 2000).