

Première partie

Accélérateurs : Théorie et simulations

Chapitre 1

Dynamique d'un accélérateur circulaire

1.1 Présentation

1.1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de définir les notions de base de physique des accélérateurs circulaires. Cet exposé est loin d'être exhaustif; le lecteur pourra se référer à des ouvrages classiques, par exemple (Wiedemann, 1993) et (Lee, 1998) pour une introduction complète sur la physique des accélérateurs ainsi que le *Handbook of Accelerator Physics and Engineering* édité par Chao et Tigner (1998) rassemblant les principales formules de bases et surtout de nombreuses références précieuses et utiles. La lecture des articles et ouvrages de référence de Courant et Snyder (1958), Bruck (1966) et Sands (1970) ont également guidé l'écriture de ce chapitre.

Après une introduction qualitative aux principaux phénomènes mis en jeu pour stocker un faisceau de particules, je définirai de manière rigoureuse l'expression du Hamiltonien la plus générale pour un accélérateur de particules. Cette formulation sera utile pour aborder le second chapitre où est construit un intégrateur des équations du mouvement (section 1.2). Je rappellerai ensuite succinctement les résultats principaux en approximation linéaire (section 1.3.1). Enfin, je discuterai de quelques grandeurs fondamentales utilisées pour définir les performances d'une source de lumière (section 1.4).

1.1.2 Description générale

Un anneau de stockage est une structure magnétique circulaire dans laquelle on accumule un faisceau intense de particules. Tout l'enjeu est de pouvoir conserver ce faisceau pendant plusieurs heures voire dizaines d'heures. Pour que le faisceau conserve de bonnes propriétés (taille, divergence, cohérence), un vide poussé doit exister dans l'anneau. Suivant le type de particules et les caractéristiques de l'anneau de stockage, le faisceau sera utilisé soit pour réaliser des collisions entre particules (*e.g.* le défunt anneau de collision LEP et le futur collisionneur LHC du CERN), soit pour produire de la lumière (*e.g.* les sources de rayonnement synchrotron de Grenoble (ESRF), de Berkeley (ALS), la future source de lumière de troisième génération SOLEIL (Saclay)). Dans le premier cas, le domaine d'application est principalement la physique des hautes énergies (particules, ions lourds); les sources de lumières sont,

quant à elles, utilisées comme microscopes géants aux propriétés inégalées dans les domaines de la recherche fondamentale et appliquée (biologie, propriétés structurales et électroniques de la matière, environnement, applications industrielles).

Plongeons à présent au cœur d'un anneau de stockage¹ :

- Un paquet d'électrons d'énergie nominale est injecté dans la chambre à vide de l'accélérateur (cf. Fig. 1.1). Les électrons y circulent à une vitesse proche de celle de la lumière. Un champ magnétique guide les particules tout au long de l'anneau autour d'une orbite fermée de référence. Il focalise les particules et leur imprime un mouvement quasi-périodique radial et vertical autour de cette orbite fermée. On parle alors d'*oscillations bêta*trons.

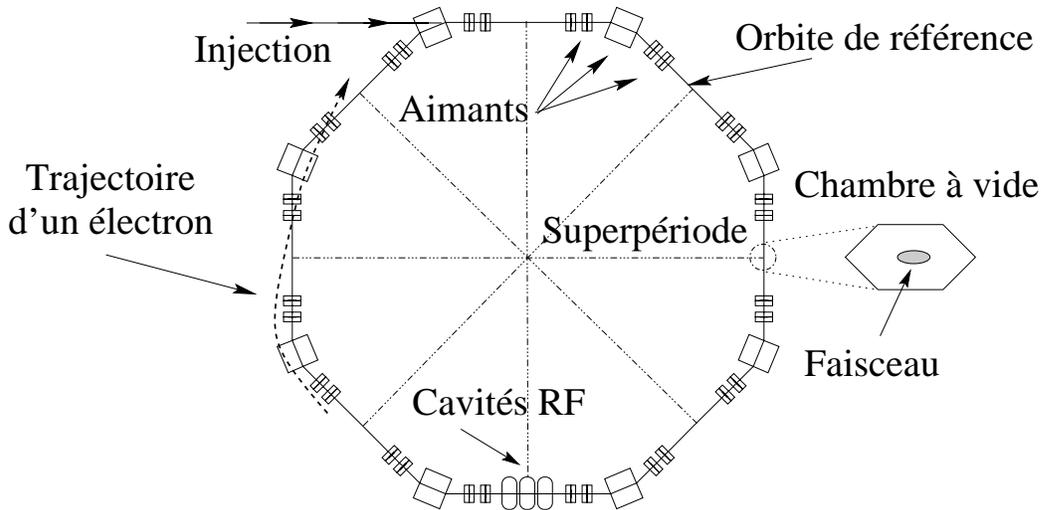


FIG. 1.1: Schéma d'un anneau de stockage à électrons constitué de huit super-périodes. Les particules circulent dans une chambre à vide tout au long de l'anneau constitué d'une succession d'éléments magnétiques.

- Dans le cadre d'une machine circulaire idéale, nous pouvons associer une fonction spécifique à chaque type d'éléments magnétiques. Chacun des M dipôles courbe la trajectoire du faisceau d'un angle $\theta = \frac{2\pi}{M}$. Des *quadripôles* sont utilisés comme lentilles magnétiques pour focaliser les particules. Ces deux principaux types d'éléments ainsi que la *section droite* (absence de champ électromagnétique) définissent l'*optique linéaire* de l'anneau, en référence à l'approximation paraxiale utilisée. L'agencement de ces éléments définit la *maille* de l'accélérateur. Si l'anneau de stockage est constitué de N secteurs identiques appelés *super-périodes*, alors il possède une symétrie interne qui permet d'augmenter la stabilité globale de la dynamique (ce point sera abordé dans la section 1.4).
- Durant chaque révolution, un électron perd une partie de son énergie sous forme de *rayonnement synchrotron*. Afin de stocker les électrons pendant plusieurs heures, il est nécessaire de compenser en moyenne cette perte d'énergie. C'est le rôle des *cavités radiofréquences* qui accélèrent longitudinalement la particule qui les traverse.
- Cette accélération périodique a pour effet de regrouper les électrons en paquets. Dans chaque paquet, les électrons oscillent en longueur et en énergie par rapport à une

¹Cette visite guidée est fortement imprégnée de la lecture de l'introduction à la physique des accélérateurs d'électrons de Sands (1966).

particule de référence située au centre du paquet (cf. Fig. 1.2). Ces oscillations sont appelées *oscillations synchrotrons*.

- La combinaison perte d'énergie par rayonnement synchrotron et apport d'énergie des cavités RF induit un lent *amortissement radiatif* des amplitudes d'oscillation des particules : la trajectoire de chaque électron tend vers celle d'une particule de référence située au centre du paquet.
- L'amortissement des oscillations est arrêté par les *fluctuations quantiques*. Ce phénomène est lié à la quantification du rayonnement émis par les électrons et a tendance à exciter continûment les oscillations des particules : le faisceau atteint alors ses *dimensions d'équilibre*. Les particules ont leurs phases et amplitudes d'oscillations distribuées suivant une loi de Gauss transversalement et longitudinalement.

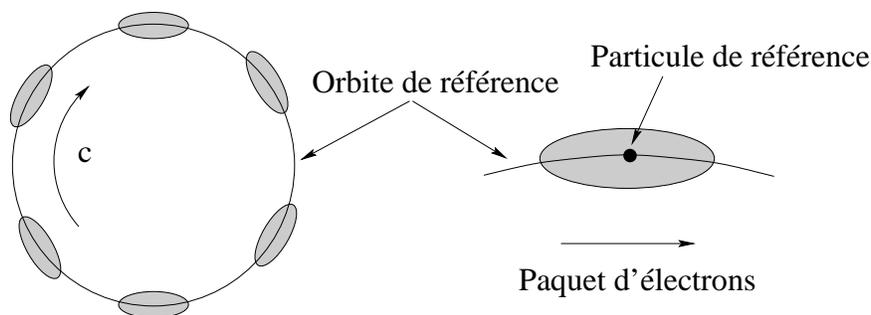


FIG. 1.2: Paquets circulant dans un anneau de stockage à une vitesse proche de la lumière c , autour de l'orbite de référence. Au sein de chaque paquet, les particules oscillent en longitude et en énergie (dynamique longitudinale) — inspiré de Sands, 1970 —

- Pour chaque degré de liberté, il existe une amplitude maximale d'oscillation au-delà de laquelle le mouvement devient instable. Cette amplitude définit l'*acceptance* du faisceau. L'amplitude limite peut être due à un élément physique qui arrête les électrons (*e.g.* les parois de la chambre à vide) ou à un effet nonlinéaire du champ électromagnétique conduisant à la divergence des trajectoires.
- Les électrons peuvent également être perdus suite à des diffusions sur les atomes du gaz résiduel présent dans la chambre à vide ou en raison des fluctuations statistiques induites par l'amortissement radiatif et l'excitation quantique.
- Pour être complet, il faut dire quelques mots sur les effets collectifs. Typiquement un paquet est constitué d'un milliard d'électrons. Les électrons peuvent interagir entre eux : lors de diffusions simples ou multiples, les électrons peuvent acquérir des amplitudes d'oscillation plus grandes que l'acceptance du faisceau. Les électrons peuvent également se mettre à osciller de manière cohérente ce qui, dans certains cas, conduit à l'instabilité.

L'objectif de la section suivante est d'établir l'expression générale du Hamiltonien d'une particule relativiste se déplaçant dans un champ électromagnétique. Nous pourrons alors en déduire les équations du mouvement et discuter de la dynamique linéaire et nonlinéaire d'une particule circulant dans un anneau de stockage.

1.2 Formulation hamiltonienne

Pour établir les équations du mouvement d'une particule circulant dans un accélérateur, nous partirons du principe de moindre action. Nous commencerons par établir l'expression du Lagrangien d'une particule libre relativiste de masse m , puis nous plongerons la particule de charge e dans un champ électromagnétique (section 1.2.1). Nous en déduirons l'expression générale du Hamiltonien relativiste que nous exprimerons en coordonnées de l'accélérateur (section 1.2.2). A chaque étape, nous définirons avec précision l'ensemble des hypothèses réalisées et l'expression générale du champ magnétique (section 1.2.3).

1.2.1 Lagrangien relativiste

Soit \mathcal{A} l'intégrale d'action pour une particule libre relativiste, m sa masse, $\mathbf{q} = (x, y, z)$ son vecteur position et $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ son vecteur vitesse. Par application du principe de relativité, l'action doit être indépendante du choix du référentiel d'inertie, soit un invariant de Lorentz : l'intégrale d'action \mathcal{A} est donc un scalaire. De plus, il ne doit figurer que des différentielles du premier degré sous le signe d'intégration (cf. Landau et Lifchitz, *Physique théorique : Théorie des Champs*, chap. I et II). La seule solution pour une particule libre est alors l'intervalle relativiste ds à une constante de proportionnalité près, notée α .

Si l'intégrale est prise sur une ligne d'univers s'étendant entre deux événements a et b qui sont les positions initiale et finale de la particule aux instants respectifs t_1 et t_2 , alors l'action \mathcal{A} s'écrit :

$$\mathcal{A} = -\alpha \int_a^b ds \quad (1.1)$$

Or l'intervalle relativiste ds est donné par la métrique de Minkowski :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (1.2)$$

où c est la vitesse de la lumière ; donc l'action 1.1 peut se réécrire :

$$\mathcal{A} = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (1.3)$$

Par définition du Lagrangien (\mathcal{L}), l'action est également définie par la relation (cf. Landau et Lifchitz, *Physique théorique : Mécanique*, chap. I) :

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (1.4)$$

On déduit des équations 1.3 et 1.4 l'expression du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \quad (1.5)$$

La constante α est déterminée en passant à la limite $c \rightarrow +\infty$ qui doit redonner l'énergie cinétique classique pour une particule libre ; en effectuant un développement limité à l'ordre un de l'expression 1.5, on obtient :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^{classique} \iff -\alpha c + \frac{1}{2}\alpha \frac{v^2}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^3}\right) = [-mc^2] + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.6)$$

d'où $\alpha = mc$. Le terme entre crochets est constant donc il n'intervient pas dans les équations du mouvement : il correspond à l'énergie de masse de la particule.

Le Lagrangien d'une *particule libre relativiste de masse m* s'exprime finalement par :

$$\mathcal{L}^{libre}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.7)$$

Pour une *particule relativiste de charge e en mouvement dans un champ électromagnétique*, le Lagrangien total comporte un terme supplémentaire (\mathcal{L}^{inter}) caractérisant l'interaction de la particule avec le champ électromagnétique (ϕ, \mathbf{A}) (voir Landau et Lifchitz, *Théorie des Champs*, chap. III) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}^{libre} + \mathcal{L}^{inter} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} - e\phi(\mathbf{q}) \quad (1.8)$$

avec \mathbf{A} le potentiel vecteur et ϕ le potentiel scalaire solutions des équations de Maxwell.

1.2.2 Hamiltonien relativiste

1.2.2.1 Moments canoniques

Par définition, les moments canoniques $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ s'obtiennent à partir du Lagrangien :

$$p_k \stackrel{déf}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{avec} \quad (p_1, q_1) = (p_x, x), \quad (p_2, q_2) = (p_y, y) \quad \text{et} \quad (p_3, q_3) = (p_z, z) \quad (1.9)$$

soit en utilisant l'expression 1.8 et le facteur de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (1.10)$$

Le Hamiltonien autonome \mathcal{H} est obtenu à partir de la fonction de Lagrange 1.8 (voir Landau et Lifchitz, *Mécanique*, chap. VII) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\stackrel{déf}{=} \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \gamma m v^2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - (-\gamma^{-1} m c^2 + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi(\mathbf{q})) \\ &= \gamma m c^2 + e\phi(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

En introduisant l'impulsion mécanique $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, on établit à partir des équations 1.10 et 1.11 la relation :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H} - e\phi(\mathbf{q}))^2 - \pi^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
 &= m^2 c^4
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

L'expression du Hamiltonien 1.11 devient en utilisant la relation 1.12 :

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{q}))^2 + m^2 c^2} + e\phi(\mathbf{q})} \tag{1.13}$$

Les équations du mouvement sont les *équations dites de Hamilton* ou *canoniques* :

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, 3 \tag{1.14}$$

avec la relation supplémentaire si le Hamiltonien dépend explicitement du temps t :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \tag{1.15}$$

Les variables (q, p) sont appelées *variables canoniques*. Pour une description du formalisme Hamiltonien, le lecteur pourra se reporter par exemple au chapitre VII du tome de *Mécanique* de Landau et Lifchitz.

1.2.2.2 Définition des coordonnées de l'accélérateur

Pour la suite de l'exposé, il est utile d'obtenir une expression du Hamiltonien pour les jeux de coordonnées cartésiennes et curvilignes. L'obtention générale du Hamiltonien va être présentée en coordonnées curvilignes dont les coordonnées cartésiennes ne sont qu'un cas particulier (la courbure et la torsion sont nulles, cf. *infra*).

Les coordonnées curvilignes, notées (X, Y, s) , sont définies par rapport au repère de Serret-Frenet direct $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$; une particule de coordonnées transverses X et Y est repérée par son vecteur position \mathbf{r} par rapport à l'orbite de référence \mathbf{r}_0 (voir Fig. 1.3) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(X, Y, s) &= \mathbf{r}_0(s) + X\mathbf{n}(s) + Y\mathbf{b}(s) \\
 &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Les vecteurs orthonormés $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$ sont respectivement les vecteurs tangent, normal et binormal définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{t} & \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{ds} \mathbf{r}_0(s) \\ \mathbf{n} & \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{\|\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}_0(s)\|} \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}_0(s) \\ \mathbf{b} & \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{t} \times \mathbf{n} \end{cases} \tag{1.17}$$

où $h(s)$ et $\tau(s)$ décrivent la courbure et la torsion locales de la trajectoire à la longitudes s :

$$\begin{cases} h(s) & = \frac{1}{\rho(s)} = \left\| \frac{d^2 \mathbf{r}_0(s)}{ds^2} \right\| \\ \tau(s) & = \frac{1}{h^2(s)} \det \left(\frac{d}{ds} \mathbf{r}_0(s), \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r}_0(s), \frac{d^3}{ds^3} \mathbf{r}_0(s) \right) \end{cases}$$

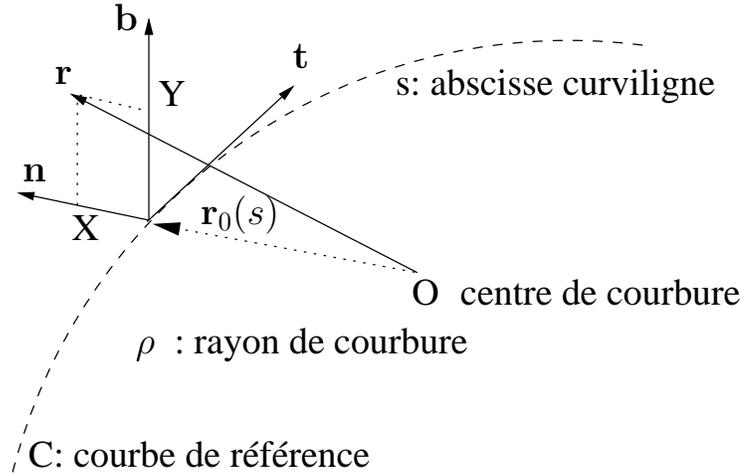


FIG. 1.3: Repère de Serret-Frenet $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$. Définition des coordonnées curvilignes (X, Y, s) utilisées pour écrire les équations du mouvement d'une particule autour de la trajectoire de référence.

Je rappelle les formules de Frenet :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau(s) & h(s) \\ \tau(s) & 0 & 0 \\ -h(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

On recherche une transformation canonique entre les anciennes variables notées $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ et les nouvelles variables $(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = (X, Y, s, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_s)$. Pour cela, on construit une fonction génératrice dépendant des anciens moments et des nouvelles positions, $F(\mathbf{p}, \mathcal{Q})$. Les changements de variables sont alors définis implicitement par :

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} F(\mathbf{p}, \mathcal{Q}) \quad (1.19a)$$

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{\partial}{\partial \mathcal{Q}} F(\mathbf{p}, \mathcal{Q}) \quad (1.19b)$$

L'équation 1.19a s'intègre simplement en utilisant la relation 1.16.

$$F(\mathbf{p}, \mathcal{Q}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}(\mathcal{Q}) + \Gamma(\mathcal{Q}). \quad (1.20)$$

Par convention la fonction $\Gamma(\mathcal{Q})$ est choisie nulle. L'équation 1.19b définit les nouveaux moments recherchés :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_X &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \stackrel{\text{déf}}{=} P_X \\ \mathcal{P}_Y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{déf}}{=} P_Y \\ \mathcal{P}_s &= \mathbf{p} \cdot ((1 + hX)\mathbf{t} + X\tau\mathbf{n} - Y\tau\mathbf{b}) \stackrel{\text{déf}}{=} (1 + hX)P_s + X\tau P_X - Y\tau P_Y \end{cases}$$

avec (P_X, P_Y, P_s) les projections usuelles de l'impulsion sur la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. On note également que les coordonnées du potentiel vecteur \mathbf{A} se transforment comme celles du moment \mathbf{p} (cf. équation 1.10).

Dans la suite, on fait l'hypothèse que la trajectoire de référence est plane, *i.e.* que la torsion $\tau(s)$ est nulle². En remarquant que la base de Serret-Frenet est orthonormée, le nouveau Hamiltonien s'écrit en utilisant l'expression 1.13 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X, Y, s, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_s) &= \mathcal{H}(\mathbf{q}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}), \mathbf{p}(\mathcal{Q}, \mathcal{P})) \\ &= c \sqrt{m^2 c^2 + (\mathcal{P}_X - e\mathcal{A}_X)^2 + (\mathcal{P}_Y - e\mathcal{A}_Y)^2 + \left(\frac{\mathcal{P}_s - e\mathcal{A}_s}{1 + hX}\right)^2} + e\phi(\mathcal{Q}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

L'expression 1.21 va être réécrite sous une forme plus standard pour la physique des accélérateurs au moyen de trois transformations canoniques (cf. Dragt et Forest, 1986).

1.2.2.3 Changement de variable indépendante

Dans un accélérateur, il est plus commode d'exprimer la trajectoire d'une particule en fonction de la coordonnée longitudinale prise comme variable indépendante à la place du temps t (z en coordonnées rectangulaires ou s en coordonnées curvilignes).

Comme nouveau Hamiltonien³, on choisit $\tilde{\mathcal{H}}(X, Y, t, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_t; s) = -\mathcal{P}_s$ en notant $\mathcal{P}_t = -\tilde{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(X, Y, t, \mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y, \mathcal{P}_t) &= - (1 + hX) \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}_t + e\phi(\mathbf{e})}{c}\right)^2 - m^2 c^2 - (\mathcal{P}_X - e\mathcal{A}_X)^2 - (\mathcal{P}_Y - e\mathcal{A}_Y)^2} \\ &\quad - e\mathcal{A}_s \end{aligned} \quad (1.22)$$

On vérifie *a posteriori* que $\tilde{\mathcal{H}}$ conjugue les couples de variables (X, \mathcal{P}_x) , (Y, \mathcal{P}_y) et (t, \mathcal{P}_t) :

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_t \stackrel{\text{déf}}{=} -d\tilde{\mathcal{H}} &= - \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{Q}_k} d\mathcal{Q}_k + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_k} d\mathcal{P}_k \right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial s} ds - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} d\mathcal{P}_s - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} dt \\ \Rightarrow -d\mathcal{P}_s \stackrel{\text{déf}}{=} d\tilde{\mathcal{H}} &= \sum_{k=1}^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{Q}_k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} d\mathcal{Q}_k + \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} d\mathcal{P}_k \right] \\ &\quad + \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} dt + \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} d\mathcal{P}_t \end{aligned} \quad (1.23)$$

par identification en utilisant les équations 1.14, on obtient les nouvelles équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_k} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = \frac{d\mathcal{Q}_k}{ds} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{Q}_k} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{Q}_k} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = -\frac{d\mathcal{P}_k}{ds} \end{cases} \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (1.24)$$

²Bien traité, même pour des éléments tels des wigglers et solénoïdes, la notion de torsion est inutile (voir Forest et Ohmi, 1992 et Forest, Reusch, Bruhwiler et Amiry, 1994, p. 69).

³C'est une application le théorème des fonctions implicites avec pour hypothèse $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_s} \neq 0$, *i.e.* que la particule ne rebrousse pas chemin dans l'accélérateur.

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathcal{P}_t} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = \frac{dt}{ds} \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_s} \right)^{-1} = -\frac{d\mathcal{P}_t}{ds} \end{cases} \quad (1.25)$$

La variable t est physiquement reliée à la notion de temps de vol et son moment canonique \mathcal{P}_t est l'opposé de l'énergie totale de la particule. Pour la suite des calculs, on suppose que le potentiel électrique ϕ est nul⁴.

En faisant l'hypothèse que le potentiel vecteur est nul le long de l'axe optique, *i.e.* $A(0, 0, s) = 0$, on constate l'existence de la trajectoire particulière : $(X, Y, \mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_s) = (0, 0, 0, 0, p_0)$, que l'on appelle *trajectoire de référence*.

1.2.2.4 Changement d'échelle

La seconde transformation revient simplement à introduire un facteur d'échelle dans les variables :

$$\begin{cases} \bar{x} = X \\ \bar{y} = Y \\ \bar{t} = -ct \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{p}_x = \frac{\mathcal{P}_x}{p_0} \\ \bar{p}_y = \frac{\mathcal{P}_y}{p_0} \\ \bar{p}_t = -\frac{\mathcal{P}_t}{p_0 c} \end{cases} \quad (1.26)$$

Pour conserver la nature hamiltonienne des équations, le nouveau Hamiltonien est simplement $\bar{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{\mathcal{H}}}{p_0}$, soit :

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_t) = -(1 + h\bar{x}) \sqrt{\bar{p}_t^2 - \frac{m^2 c^2}{p_0^2} - (\bar{p}_x - e\bar{A}_x)^2 - (\bar{p}_y - e\bar{A}_y)^2} - e\bar{A}_s \quad (1.27)$$

avec $\bar{A}_k = \frac{A_k}{p_0}$. Le long de la trajectoire de référence, on a alors :

$$\begin{cases} \bar{p}_t \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{p}_t^0 = -\sqrt{\frac{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}{p_0^2 c^2}} = \frac{1}{\beta_0} \\ \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{p}_t} = -\bar{p}_t^0 = -\frac{1}{\beta_0} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c} \quad (1.28)$$

1.2.2.5 Expression finale du Hamiltonien à trois degrés de liberté

Usuellement, on préfère définir le mouvement d'une particule par rapport à une trajectoire de référence nulle, ce qui nous conduit à faire le dernier changement de variables dépendant de s (d'après Eq. 1.28) :

$$\begin{cases} \hat{x} = \bar{x} \\ \hat{y} = \bar{y} \\ \hat{t} = \bar{t} + \frac{s-s_0}{\beta_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{p}_x = \bar{p}_x \\ \hat{p}_y = \bar{p}_y \\ \hat{p}_t = \bar{p}_t - \frac{1}{\beta_0} \end{cases} \quad (1.29)$$

⁴Hypothèse non restrictive, le potentiel pourra facilement être réintroduit.

Ce changement de variables dépend explicitement de s . Si F est une fonction génératrice, le nouveau Hamiltonien sera donné par : $\hat{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial F}{\partial s}$. Nous construisons la fonction génératrice dépendant des anciennes positions et des nouveaux moments $F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \hat{p}_t, \hat{p}_x, \hat{p}_y; s) = F(\bar{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}; s)$ (Dragt et Forest, 1986) :

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \stackrel{(1.29)}{\implies} F(\bar{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}; s) = \bar{x}\hat{p}_x + \bar{y}\hat{p}_y + \bar{t}\left(\hat{p}_t + \frac{1}{\beta_0}\right) + G(\hat{\mathbf{p}}, s) \quad (1.30)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \stackrel{(1.29)}{\implies} F(\bar{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}; s) = \bar{x}\hat{p}_x + \bar{y}\hat{p}_y + \bar{t}\left(\hat{p}_t + \frac{1}{\beta_0}\right) + \frac{s - s_0}{\beta_0}\hat{p}_t + K(s) \quad (1.31)$$

La fonction $K(s)$ est *a priori* une fonction quelconque. Pour permettre des comparaisons avec la littérature, elle est choisie telle que :

$$F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \hat{p}_t, \hat{p}_x, \hat{p}_y; z) = \bar{x}\hat{p}_x + \bar{y}\hat{p}_y + \left(\bar{t} + \frac{s - s_0}{\beta_0}\right)\left(\hat{p}_t + \frac{1}{\beta_0}\right) \quad (1.32)$$

On en déduit l'expression du nouveau Hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$:

$$\hat{\mathcal{H}} = -(1 + h\hat{x})\sqrt{\left(\frac{1}{\beta_0} + \hat{p}_t\right)^2 - \frac{1}{\gamma_0^2\beta_0^2} - \left(\hat{p}_x - e\hat{A}_x\right)^2 - \left(\hat{p}_y - e\hat{A}_y\right)^2} - e\hat{A}_s + \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{1}{\beta_0} + \hat{p}_t\right) \quad (1.33)$$

en remarquant l'identité : $\frac{m^2c^2}{p_0^2} = \frac{1}{\gamma_0^2\beta_0^2}$.

1.2.2.6 Approximations

Dans le cas ultra-relativiste, le Hamiltonien 1.33 se simplifie encore⁵ puisque $\beta_0 \rightarrow 1$ et $\gamma_0 \rightarrow +\infty$. Pour alléger l'écriture, les variables « perdent leur chapeau » (si aucune confusion n'est possible) et on pose $l = \hat{t}$ et $\delta = \hat{p}_t$:

$$\mathcal{H} = -(1 + hx)\sqrt{(1 + \delta)^2 - \left(p_x - e\hat{A}_x\right)^2 - \left(p_y - e\hat{A}_y\right)^2} - e\hat{A}_s + 1 + \delta \quad (1.34)$$

Interprétons physiquement les nouvelles variables l et δ :

- $\delta = \frac{E - E_0}{p_0c}$ représente l'écart à énergie nominale E_0 normalisée par l'énergie de la particule nominale ultra-relativiste.
- $t_0(s) = \frac{s - s_0}{\beta_0}$ est le temps de passage en s de la particule synchrone. On suppose que cette dernière se trouve en s_0 en $t = 0$. Si $l > 0$, l représente l'avance de la particule par rapport à la particule synchrone.

Lorsqu'on ne s'intéresse pas au cas du solénoïde, le potentiel vecteur n'a qu'une seule composante non nulle $\hat{A}_s(x, y)$ qui ne dépend que des coordonnées transverses :

$$\boxed{\mathcal{H}(x, y, l, p_x, p_y, \delta; s) = -(1 + h(s)x)\sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x)^2 - (p_y)^2} - e\hat{A}_s + \delta + 1} \quad (1.35)$$

⁵Par exemple pour Super-ACO, $E = 0.8 \text{ GeV}$, $\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{800}{0.511} = 1566$

Pour la suite du travail, on a le choix entre conserver cette expression avec la racine carrée et effectuer un développement limité. Dans ce dernier cas, le Hamiltonien se réduit à :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -(1+hx)(1+\delta)\left(1 - \frac{1}{2(1+\delta)^2}(p_x^2 + p_y^2)\right) - e\hat{A}_s + \delta + 1 \\ &= (1+hx)\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)} - (1+hx)(1+\delta) - e\hat{A}_s + \delta + 1\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathcal{H} = (1+hx)\frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+\delta)} - hx(1+\delta) - e\hat{A}_s(x, y)} \quad (1.36)$$

Cette dernière expression sera utilisée pour déduire la dynamique linéaire. Pour l'instant, il ne reste plus qu'à déterminer l'expression du potentiel vecteur.

1.2.3 Potentiel vecteur

L'expression la plus générale du potentiel vecteur est calculée en partant des équations de Maxwell exprimées dans le vide et pour un champ électromagnétique statique en coordonnées curvilignes (Lee, 1998) :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.37)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+hx} \frac{\partial B_x}{\partial s} - \frac{h}{1+hx} B_s - \frac{\partial B_s}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_s}{\partial y} - \frac{1}{1+hx} \frac{\partial B_y}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{1}{1+hx} \frac{\partial B_s}{\partial s} + \frac{h}{1+hx} B_x = 0 \quad (1.38)$$

La divergence nulle (Eq. 1.37) implique l'existence d'un potentiel vecteur \mathbf{A} vérifiant, à une condition de jauge près : $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

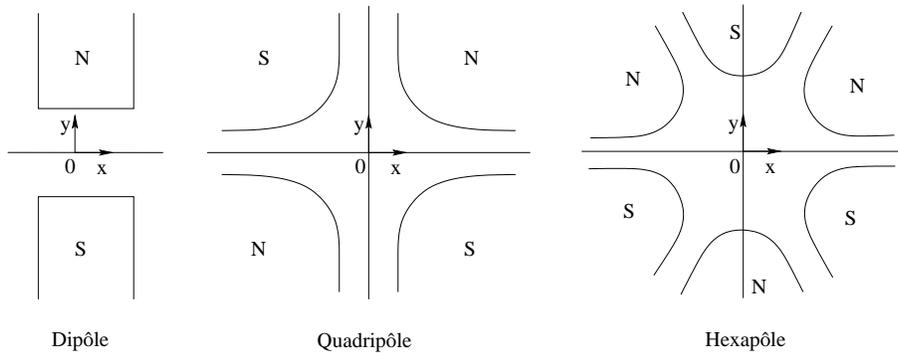


FIG. 1.4: Plan d'antisymétrie pour un dipôle, un quadripôle et un hexapôle droits.

En prenant l'hypothèse que le plan $y = 0$ est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique (cf. symétrie des aimants, Fig. 1.4), alors :

$$B_x(-y) = -B_x(y), \quad B_y(-y) = B_y(y), \quad B_s(-y) = -B_s(y) \quad (1.39)$$

Le champ magnétique peut alors être développé en série des variables transverses sous la forme (Voir Steffen, 1985 et pour une représentation plus complète, Papaphilippou *et al.*, 2001) :

$$\begin{cases} B_x = \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k}(s)x^i y^{2k+1} & \text{impair en } y \\ B_y = \sum_{i,k=0}^{\infty} b_{i,k}(s)x^i y^{2k} & \text{pair en } y \\ B_s = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{i,k}(s)x^i y^{2k+1} & \text{impair en } y \end{cases} \quad (1.40)$$

où les coefficients $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$ des fonctions de s à déterminer.

En injectant les solutions 1.40 dans les équations de Maxwell 1.38, on obtient les formules de récurrence (Steffen, 1985) :

$$\begin{cases} a'_{i,k} = (i+1)[c_{i,k} + hc_{i-1,k}] \\ a_{i,k} = \frac{i+1}{2k+1}b_{i+1,k} \\ b'_{i,k} = (2k+1)[c_{i,k} + hc_{i-1,k}] \\ c'_{i,k} = -2(k+1)[b_{i,k+1} + hb_{i-1,k+1}] - (i+1)[a_{i+1,k} + ha_{i,k}] \end{cases} \quad (1.41)$$

avec la dérivée par rapport à s notée $'$ et par convention d'écriture un coefficient ayant un de ses indices négatif est nul.

Si le champ magnétique B_y est mesuré en tant que fonction des coordonnées x, s dans le plan d'antisymétrie sous la forme :

$$B_y(y=0) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{k,0}(s)x^k \quad (1.42)$$

alors $b_{k,0} = B_{k,0}$ (cf. Eq. 1.40) et en utilisant les relations de récurrence 1.41, on déduit, après quelques lignes de calcul, l'expression générale du champ magnétique (Lee, 1998) :

$$\begin{cases} B_x = B_{1,0}y + 2B_{2,0}xy + 3B_{3,0}x^2y - \\ \quad \frac{1}{3} \left\{ 3B_{3,0} + 2hB_{2,0} - h(B_{2,0} + \frac{hB_{1,0}}{2} + \frac{B''_{0,0}}{2}) + \frac{1}{2}[B''_{1,0} - (hB'_{0,0})'] \right\} y^3 + \dots \\ B_y = B_{0,0} + B_{1,0}x + B_{2,0}x^2 - (B_{2,0} + \frac{B''_{0,0}}{2} + \frac{hB_{1,0}}{2})y^2 + B_{3,0}x^3 - \\ \quad \left\{ 3B_{3,0} + 2hB_{2,0} - h(B_{2,0} + \frac{hB_{1,0}}{2} + \frac{B''_{0,0}}{2}) + \frac{1}{2}[B''_{1,0} - (hB'_{0,0})'] \right\} xy^2 + \dots \\ B_s = B'_{0,0}y + (B'_{1,0} - hB'_{0,0})xy + (B'_{2,0} - hB'_{1,0} + h^2B'_{0,0})x^2y \\ \quad - \frac{1}{3} \left(B'_{2,0} + \frac{hB'_{1,0}}{2} + \frac{B''_{1,0}}{2} \right) y^3 + \dots \end{cases} \quad (1.43)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$ (élément rectangulaire), le champ magnétique peut s'écrire à partir de l'expression 1.43 en représentation complexe :

$$B_y + jB_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,0}(x + jy)^n - \frac{B''_{0,0}}{2}y^2 + \frac{B''_{1,0}}{2}(x + jy)^2y^2 + \dots \quad (1.44)$$

avec $j^2 = -1$.

Pour simplifier les calculs, les coefficients $B_{n,0}$ sont souvent pris constants, donc l'équation 1.44 se simplifie encore (Lee, 1998) :

$$B_y + jB_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,0}(x + jy)^n \quad (1.45)$$

par convention, on pose $B_{n,0} = B_0(b_n + ja_n)$ avec B_0 choisi tel que $b_0 = 1$ et avec $B_0b_0 = -\frac{(B\rho)}{\rho}$ où $(B\rho)$ est la *rigidité magnétique*. Cette représentation complexe du champ magnétique est souvent appelée *représentation de Beth*.

A ce stade, il existe deux conventions : la sommation de l'équation 1.45 commence à 0 aux Etats-Unis et à 1 en Europe. Dans la suite, je prendrai la convention européenne, donc l'équation 1.45 devient :

$$B_y + jB_x = B_0 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + ja_n)(x + jy)^{n-1} \quad (1.46)$$

avec

$$b_n = \frac{1}{B_0 n!} \left. \frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right|_{x=y=0} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{B_0 n!} \left. \frac{\partial^n B_x}{\partial y^n} \right|_{x=y=0} \quad (1.47)$$

Les coefficients multipolaires b_n et a_n décrivent respectivement les $2n$ -pôles parfaits droits et tournés.

Le potentiel vecteur (avec $A_x = A_y = 0$) est lié au champ magnétique par l'équation, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, soit exprimée en coordonnées curvilignes :

$$B_x = -\frac{1}{1+hx} \frac{\partial A_s}{\partial y}, \quad B_y = \frac{1}{1+hx} \frac{\partial A_s}{\partial x} \quad (1.48)$$

En coordonnées rectangulaires ($h = 0$), la formule 1.48 s'intègre immédiatement en utilisant l'expression 1.46 pour donner :

$$A_z(x, y) = B_0 \text{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n + ja_n}{n} (x + jy)^n \right) \quad (1.49)$$

où Re désigne la partie réelle. Deux types de représentations nous intéressent :

Représentation curviligne : En coordonnées curvilignes, le potentiel vecteur \mathbf{A} ne peut pas s'exprimer de manière aussi simple qu'en coordonnées rectangulaires (cf. Eq. 1.49). La solution s'exprime sous forme d'une série infinie qu'il faut tronquer à l'ordre n (voir par exemple la thèse de Fartoukh, 1997). Cette description est adaptée aux éléments type dipôle de rayon de courbure ρ_c .

$$A_s(x, y) = B_0 \left(x + \frac{x^2}{2\rho_c} \right) \quad (1.50)$$

L'expression qui nous intéresse est celle de $-e\hat{A}_s$ exprimée pour le Hamiltonien 1.36 ; en utilisant la rigidité magnétique $(B\rho) = e/p = -B_0/h$, on obtient :

$$\boxed{-e\hat{A}_s(x, y) = h \left(x + \frac{x^2}{2\rho_c} \right)} \quad (1.51)$$

Représentation rectangulaire : Ce cas est particulièrement adapté à la description des éléments sans courbure, *i.e.* les quadripôles, les hexapôles et les éléments multipolaires.

Pour le quadripôle droit et l'hexapôle droit la formule 1.49 donne respectivement :

$$A_s(x, y) = B_0 \frac{b_2}{2} (x^2 - y^2) \quad \text{et} \quad A_s(x, y) = B_0 \frac{b_3}{3} (x^3 - 3xy^2) \quad (1.52)$$

soit pour $-e\hat{A}_s$:

$$\boxed{-e\hat{A}_s(x, y) = \frac{b_2}{2} (x^2 - y^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{-e\hat{A}_s(x, y) = \frac{b_3}{3} (x^3 - 3xy^2)} \quad (1.53)$$

1.3 Dynamique transverse

1.3.1 Dynamique linéaire

Dans un accélérateur, la solution des équations transverses du mouvement peut se décomposer en deux termes, (a) l'orbite fermée qui, par définition, est une orbite de période 1 et (b) une oscillation de faible amplitude dite bétatron autour de cette orbite fermée. Nous verrons que l'orbite fermée dépend de l'énergie de la particule. Mais tout d'abord établissons les équations linéaires du mouvement.

Pour cela, nous partons de l'expression du Hamiltonien 1.36 que nous réécrivons en ne conservant que les parties linéaire et quadratique du potentiel vecteur 1.46, *i.e.* le potentiel d'un dipôle 1.51 et celui d'un quadripôle droit 1.53 :

$$\mathcal{H}_0 = (1 + hx) \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx\delta + (h^2 + b_2) \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{y^2}{2} \quad (1.54)$$

Les équations du mouvement transverse sont alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}, & \frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}, & \frac{dp_y}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \end{cases} \quad (1.55)$$

Pour l'instant, nous adoptons les approximations classiques afin de retrouver les expressions données par la littérature, à savoir :

1. l'*approximation des grandes machines* en négligeant le terme hexapolaire $hx \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)}$ dans l'expression du Hamiltonien 1.54
2. la dépendance linéaire en l'écart en énergie δ .

Le Hamiltonien 1.54 devient en prenant en compte la première approximation classique :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + \delta)} - hx\delta + (h^2 + b_2) \frac{x^2}{2} - b_2 \frac{y^2}{2} \quad (1.56)$$

Les équations du mouvement 1.55 s'écrivent comme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{1 + \delta}, & \frac{dp_x}{ds} = h\delta - (h^2 + b_2)x \\ \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{1 + \delta}, & \frac{dp_y}{ds} = b_2 y \end{cases} \quad (1.57)$$

Soit en termes d'équations différentielles du second ordre des variables x et y (en négligeant les termes d'ordre 2 en δ) :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + K_x^\delta x &= h\delta + \mathcal{O}(h^2), \\ \frac{d^2y}{ds^2} + K_y^\delta y &= 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_x^\delta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{K_x}{1+\delta} = \frac{b_2+h^2}{1+\delta} \\ K_y^\delta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{K_y}{1+\delta} = -\frac{b_2}{1+\delta} \end{cases} \quad (1.58)$$

Nous remarquerons les points suivants :

- un dipôle focalise dans le plan horizontal⁶ ;
- si un quadripôle droit focalise dans un plan, alors il défocalise dans l'autre plan, car $K_x = -K_y$ et $h = 0$;
- la focalisation dépend de l'énergie δ de la particule ;
- les fonctions K_x et K_y sont définies par morceaux à valeur constante dans chaque élément magnétique et L-périodiques⁷ pour une machine de circonférence L ;
- la solution des équations 1.58 est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Dans la suite, j'emploierai les anglicismes : particule *on momentum* si $\delta = 0$ et particule *off momentum* si $\delta \neq 0$. Le symbole ' désigne la dérivation par rapport à la longitude s et '' la dérivée seconde.

1.3.1.1 Particule *on momentum*

L'équation homogène du système 1.58 peut être réécrite pour $\delta = 0$ comme l'équation générique :

$$\begin{cases} u''(s) + K_u(s)u = 0 \\ K_u(s+L) = K_u(s) \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = x, y \quad (1.59)$$

C'est donc une *équation de Hill*.

La solution générale $u(s)$ de l'équation de Hill 1.59 décrit le mouvement d'une particule d'énergie nominale de la machine, *i.e.* $\delta = 0$. Usuellement, la solution s'écrit de différentes manières dans la littérature :

- en utilisant le théorème de Floquet (voir par exemple Courant et Snyder, 1958), la solution s'exprime en fonction de la *fonction bêatron* $\beta_u(s)$:

$$u(s) = u_\beta(s) = \sqrt{\beta_u(s)\epsilon_u} \cos(\phi_u(s) + \phi_{0u}) \quad (1.60)$$

avec la phase $\phi_u(s) = \int_0^s \frac{d\tilde{s}}{\beta_u(\tilde{s})}$, ϕ_{0u} la phase à l'origine et β_u vérifiant l'équation différentielle :

$$\beta_u''(s) + 2K_u(s)\beta_u(s) - 2\gamma_u(s) = 0 \quad (1.61)$$

en posant $\alpha_u = -\frac{1}{2}\beta_u'$ et $\gamma_u = \frac{1+\alpha_u^2}{\beta_u}$. Les paramètres α_u , β_u et γ_u sont appelés *fonctions ou paramètres de Twiss*. L'avance de phase sur un tour complet ramenée à 2π définit le *nombre d'ondes* ν_u :

$$\nu_u = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\tilde{s}}{\beta_u(\tilde{s})} \quad (1.62)$$

⁶pour un aimant secteur. Nous verrons au chapitre suivant que pour un aimant à coins, il existe un terme supplémentaire de focalisation horizontale et verticale.

⁷Pour une machine idéale composée de N super-périodes, K_u sera $\frac{L}{N}$ -périodique.

qui correspond au nombre moyen d'oscillations effectuées par la particule autour de l'orbite fermée.

L'invariant linéaire, aussi appelé *invariant de Courant-Snyder* ou encore *émittance*, est l'intégrale première du mouvement :

$$\gamma_u u^2 + 2\alpha_u u u' + \beta_u^2 u'^2 = \epsilon_u \quad (1.63)$$

Géométriquement, l'équation 1.63 est celle d'une ellipse d'aire $\pi\epsilon_u$ dans le plan (u, u') (cf. Fig. 1.5).

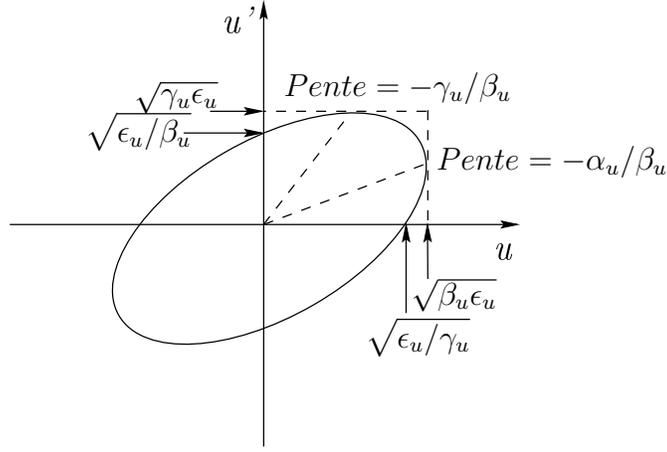


FIG. 1.5: Ellipse invariante dans l'espace des phases (u, u') . L'aire de l'ellipse est $\pi\epsilon_u$; α_u , β_u et γ_u sont les fonctions de Twiss.

– en utilisant la paramétrisation de Courant-Snyder (1958) :

$$\mathcal{M}(s_2|s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{2u}} & 0 \\ -\frac{\alpha_{2u}}{\sqrt{\beta_{2u}}} & \frac{1}{\sqrt{\beta_{2u}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi_{12} & \sin \psi_{12} \\ -\sin \psi_{12} & \cos \psi_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{1u}} & 0 \\ -\frac{\alpha_{1u}}{\sqrt{\beta_{1u}}} & \frac{1}{\sqrt{\beta_{1u}}} \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

où $\mathcal{M}(s_2|s_1)$ est la *matrice de transfert* de la longitude s_1 à s_2 , ψ_{12} l'avance de phase entre s_1 à s_2 , $\beta_{iu} = \beta_u(s_i)$. Sur un tour complet, l'expression 1.64 se simplifie pour donner l'application linéaire de premier retour :

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}_2 \cos \psi_u + \mathcal{J}_u \sin \psi_u, \quad \text{avec } \psi_u = 2\pi\nu_u \quad \text{et } u = x, y \quad (1.65)$$

avec \mathcal{I}_2 la matrice identité et

$$\mathcal{J}_u = \begin{pmatrix} \alpha_u & \beta_u \\ -\gamma_u & -\alpha_u \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

– en utilisant les *fonctions principales* $C_u(s)$ et $S_u(s)$ qui par définition sont deux solutions indépendantes de l'équation de Hill 1.59 vérifiant :

$$\begin{cases} C_u(0) = 1, & S_u(0) = 0 \\ C'_u(0) = 0, & S'_u(0) = 1 \end{cases} \quad (1.67)$$

La solution générale avec pour conditions initiales (u_0, u'_0) peut alors s'écrire (Courant et Snyder, 1958) :

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_u(s) & S_u(s) \\ C'_u(s) & S'_u(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

1.3.1.2 Particule *off momentum*

Pour une particule n'ayant pas l'énergie nominale du faisceau, *i.e.* $\delta \neq 0$, l'équation 1.58 devient :

$$u''(s) + K_u(s)u(s) = h(s)\delta \quad \text{avec } u = x, y \quad (1.69)$$

Par convention, on appelle fonction *dispersion* la solution particulière $\eta_u(s)$ périodique pour $\delta = 1$ de l'équation 1.69. En utilisant les fonctions principales $C_u(s)$ et $S_u(s)$, la dispersion linéaire est donnée par la formule (Lee, 1998) :

$$\eta_u(s) = S_u(s) \int_0^s h(\tilde{s})C_u(\tilde{s}) d\tilde{s} - C_u(s) \int_0^s h(\tilde{s})S_u(\tilde{s}) d\tilde{s} \quad (1.70)$$

En utilisant la linéarité des équations, on en déduit que la solution complète peut s'exprimer par :

$$u(s) = \sqrt{\epsilon_u \beta_u(s)} \cos(\phi_u(s) + \phi_{u0}) + \eta_u(s)\delta \quad (1.71)$$

$$= u_\beta(s) + u_\delta(s) \quad (1.72)$$

avec $u_\beta(s)$ la solution bétatron et $u_\delta(s)$ l'*orbite fermée chromatique*.

Similairement à l'optique géométrique où une lentille focalise plus faiblement les photons de petite longueur d'onde, *i.e.* de grande énergie, la focalisation d'un quadripôle est une fonction intrinsèquement dépendante de l'énergie (δ). Si K_u est le gradient quadripolaire, alors on peut écrire (cf. Eq. 1.58) :

$$K_u^\delta = \frac{K_u}{1 + \delta} = K_u(1 - \delta + \mathcal{O}(\delta^2)) \quad (1.73)$$

Donc, les particules ayant une énergie supérieure à l'énergie nominale $\delta > 0$ sont moins focalisées. Il s'ensuit que l'avance de phase dans un élément quadripolaire devient une fonction de l'énergie, ce qui nous conduit à définir la *chromaticité* comme la variation du nombre d'ondes, ν_u , en fonction de l'énergie :

$$\xi_u = \frac{\partial \nu_u}{\partial \delta} \quad (1.74)$$

Suivant les cas, nous parlerons de *chromaticité* [globale] ou de *chromaticité réduite*, *i.e.* ramenée au nombre d'ondes $\xi_u^{red} = \frac{\xi_u}{\nu_u}$. La contribution produite uniquement par les éléments linéaires, *i.e.* les dipôles et les quadripôles est appelée *chromaticité naturelle*. Elle est toujours négative et a des conséquences très dommageables sur la dynamique globale du faisceau si elle n'est pas corrigée. Par exemple pour SOLEIL, les chromaticités naturelles sont $\xi_x^{nat} = -3.01 \times 18.28$ et $\xi_y^{nat} = -2.66 \times 8.38$, ce qui induit pour $\delta = 1$ % les déplacements des nombres d'ondes proches du demi-entier $(\Delta \nu_x, \Delta \nu_y) = (-0.5, -0.2)$. Ces glissements des nombres d'ondes peuvent amener le faisceau sur des lignes de résonance et conduire à des conséquences néfastes pour les performances de l'anneau.

La seconde raison nécessitant une correction de chromaticité provient des effets collectifs. Lorsqu'un paquet de particules circule dans l'accélérateur, les particules de tête laissent derrière elles un champ de sillage qui va être ressenti par les particules de queue du paquet et induire des instabilités. Au bout d'une demi-période synchrotron, les particules de tête

deviennent les particules de queue et réciproquement. Ce type d'instabilité, dite *head-tail*, peut conduire à la perte du faisceau. Il peut être montré (voir par exemple Lee, 1998) que ces instabilités disparaissent à chromaticités nulles et sont plus néfastes pour des chromaticités négatives que positives.

Dans un anneau de stockage, la chromaticité doit être soit nulle soit légèrement positive. Pour la compenser, on introduit dans l'anneau des éléments nonlinéaires : les hexapôles⁸.

1.3.2 Dynamique nonlinéaire

Le Hamiltonien complet 1.36 peut maintenant être écrit sous la forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (1.75)$$

où \mathcal{H}_0 décrit le mouvement linéaire d'une machine parfaite (cf. Eq. 1.54) et \mathcal{H}_1 contient les défauts de champs dipolaires, quadripolaires et le potentiel vecteur des multipôles. Si \mathcal{H}_1 est suffisamment faible, le mouvement va être encore stable. Toutes les grandeurs linéaires définies précédemment ne vont plus être des constantes du mouvement.

En particulier, les nombres d'ondes vont varier avec l'amplitude et l'énergie et peuvent au premier ordre d'une théorie des perturbations s'écrire (voir par exemple Guignard, 1978, Ruth *et al.*, 1985 ou Wiedemann, 1995) :

$$\nu_u = \nu_{0u} + k_{uv}u^2 + k_{vu}v^2 + \xi_u\delta + \mathcal{O}(u^4 + v^4 + \delta^2) \quad (1.76)$$

avec si $u = x$, $v = y$ et *vice versa*. La contribution linéaire définit le *point de fonctionnement* de la machine (ν_{0x}, ν_{0y}). Les coefficients k_{uv} et k_{vu} sont les premiers termes introduits par les nonlinéarités.

La principale cause de nonlinéarité dans un accélérateur d'électrons provient de l'introduction des hexapôles. Regardons succinctement les effets qu'ils induisent. Pour cela, décrivons brièvement le principe de correction de la chromaticité : lorsqu'un hexapôle n'est pas traversé en son centre, une composante quadripolaire apparaît et peut être judicieusement utilisée pour corriger la chromaticité. Les équations du mouvement pour un hexapôle de force $S = 2b_2$ s'écrivent (cf. Eq. 1.53 et Eq. 1.54) :

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{2}S(x^2 - y^2) & = 0 \\ y'' - Sxy & = 0 \end{cases} \quad (1.77)$$

Pour un hexapôle de longueur infinitésimale ds , on a alors :

$$\begin{cases} dx' & = -\frac{1}{2}S(x^2 - y^2)ds \\ dy' & = Sxyds \end{cases} \quad (1.78)$$

Pour la correction chromatique, il est nécessaire de pouvoir distinguer les trajectoires correspondant aux différentes énergies : on se place donc dans une région dispersiv⁹. En utilisant

⁸Des octupôles peuvent être également utilisés mais la correction est du second ordre, *i.e.* les champs magnétiques doivent être plus élevés et donc induire des effets chromatiques plus importants.

⁹La dispersion verticale η_y est supposée nulle.

les équations 1.72 et 1.78, il advient :

$$\begin{cases} dx' &= S \left(\boxed{\eta_x \delta x_\beta} + \frac{1}{2} \eta_x^2 \delta^2 + \frac{1}{2} (x_\beta^2 - y_\beta^2) \right) ds \\ dy' &= S \left(\boxed{\eta_x \delta y_\beta} + x_\beta y_\beta \right) ds \end{cases} \quad (1.79)$$

Il peut être démontré simplement qu'un défaut de gradient intégré $\Delta K ds$ localisé en $s = s_0$ introduit le glissement des nombres d'ondes (voir par exemple Lee, 1998) :

$$\Delta \nu_u = \frac{1}{4\pi} \beta_u(s_0) \Delta K ds, \quad (1.80)$$

formule qui se généralise pour une distribution de défauts $k(s)$ à l'intégrale sur la circonférence de l'accélérateur :

$$\Delta \nu_u = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_u(s) k(s) ds \quad (1.81)$$

Si l'on ne considère que la partie quadripolaire de l'équation 1.79, le défaut local de focalisation $\pm S \eta_x \delta ds$ apparaît. En utilisant alors la définition de la chromaticité 1.74 et l'équation 1.81, on déduit immédiatement que la participation à la chromaticité des hexapôles s'écrit :

$$\begin{cases} \xi_x^{hex} &= \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) S(s) \eta_x(s) ds \\ \xi_y^{hex} &= -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) S(s) \eta_x(s) ds \end{cases} \quad (1.82)$$

En principe, deux familles hexapolaires de force intégrée S_1 et S_2 suffisent pour compenser les deux chromaticités; les forces doivent alors satisfaire pour chaque maille d'une machine N-périodique :

$$\begin{cases} S_1 \beta_x(s_1) \eta_x(s_1) + S_2 \beta_x(s_2) \eta_x(s_2) &= \frac{\xi_x^{nat}}{N} \\ -S_1 \beta_y(s_1) \eta_x(s_1) - S_2 \beta_y(s_2) \eta_x(s_2) &= \frac{\xi_y^{nat}}{N} \end{cases} \quad (1.83)$$

en supposant que les deux hexapôles sont localisés respectivement en $s = s_1$ et $s = s_2$.

Les hexapôles (parfaits) introduisent deux sortes d'effets indésirables (cf. Eq. 1.79) :

1. un terme d'aberration chromatique $\eta_x^2 \delta^2$
2. deux termes d'aberration géométrique $(x^2 - y^2)$ et xy

Ces termes d'aberration sont généralement corrigés partiellement en introduisant de nouvelles familles d'hexapôles dans la maille de la machine.

Dans un accélérateur circulaire, la deuxième contribution aux nonlinéarités provient des défauts magnétiques des aimants (déplacements, rotations d'un élément, champs de fuite, composantes multipolaires). Ces défauts sont systématiques ou aléatoires et inhérents à l'accélérateur. Nous verrons au cours des chapitres suivants qu'une bonne connaissance des défauts quadripolaires permet déjà de bien modéliser la dynamique de l'accélérateur.

Les défauts magnétiques induisent des phénomènes résonants qui détériorent la stabilité et les performances de la machine.

1.4 Définitions complémentaires

1.4.1 Résonances

La dynamique transverse est modélisée par un système à $(2+1)$ degrés de liberté. La condition de résonance est obtenue pour une combinaison linéaire entre les nombres d'ondes transverses ν_x , ν_y et le nombre d'ondes longitudinale normalisé à $\nu = 1$, *i.e.* :

$$p\nu_x + q\nu_y + r = 0 \quad \text{avec} \quad (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.84)$$

Habituellement $|p|+|q|$ est appelé l'*ordre* de la résonance et correspond à l'ordre des polynômes du développement du potentiel vecteur. Cependant, il est souvent plus judicieux de définir l'ordre par l'entier $|p| + |q| + |r|$ à partir de l'équation :

$$p[\nu_x] + q[\nu_y] + r = 0 \quad \text{avec} \quad (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.85)$$

où $[\]$ désigne la partie fractionnaire des nombres d'ondes. Cette définition, plus naturelle, correspond à celle adoptée en Mécanique Céleste. Dans la suite, l'ordre des résonances défini avec cette convention sera noté par $p : q : r$.

Pour une machine N-périodique, *i.e.* constituée de N super-périodes, la condition de résonance est plus stricte : la dynamique de la machine totale est alors la même que pour une seule super-période avec pour fréquence longitudinale $\nu' = N$.

$$p\nu_x + q\nu_y + r' \times N = 0 \quad \text{avec} \quad (p, q, r') \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.86)$$

Plus un accélérateur a une périodicité élevée, plus la condition de résonance est sévère (cf. Fig. 1.6). Dans la suite, nous parlerons de *résonances permises*, *systématiques* ou de *structure* et de *résonances interdites*, sous-entendu par la périodicité.

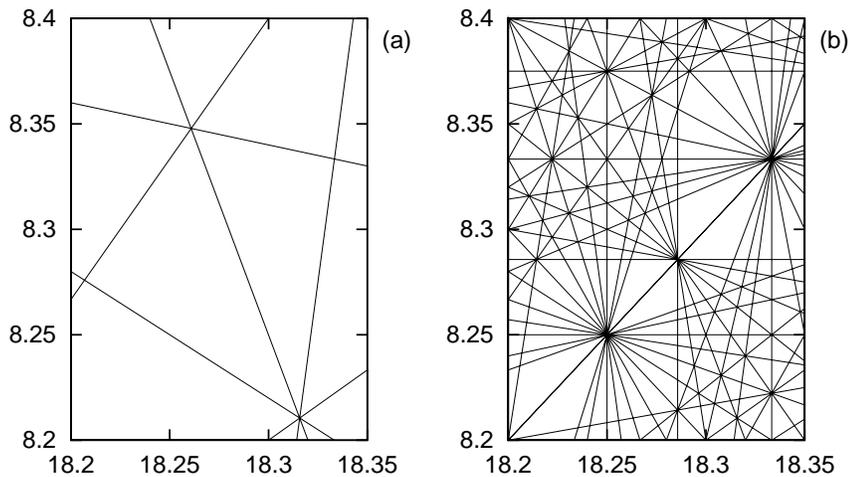


FIG. 1.6: Diagramme des résonances jusqu'à l'ordre 8 avec (a) et sans (b) 12-périodicité (exemple de l'ALS). La symétrie interne d'un accélérateur est utilisée pour augmenter la stabilité globale de la dynamique. Le point de fonctionnement d'une machine est choisi dans une région du diagramme où il y a peu de résonances.

Dans une théorie de perturbation simplement résonante du premier ordre, il peut être montré que, pour des *résonances sommes* ($qp > 0$), la différence des émittances $\epsilon_x - \epsilon_y$ est conservée. Pour des *résonances différences* ($qp < 0$), c'est la somme des émittances $\epsilon_x + \epsilon_y$ qui est conservée (voir par exemple : *A General Treatment of Resonances in Accelerators*, Guignard, 1978). Dans le premier cas, il peut y avoir amplification mutuelle des amplitudes d'oscillation (proportionnelles à la racine carrée de l'émittance), ce qui conduira à la divergence des trajectoires des particules alors que pour des résonances différences, il ne peut y avoir que transfert d'amplitudes d'oscillation entre les deux plans. Durant ma thèse, j'ai parfois entendu dire que les résonances différences ne sont pas dangereuses pour la dynamique du faisceau. En conséquence, les largeurs des résonances différences ne sont pas toujours optimisées. Il est clair que ce résultat est celui d'une théorie de perturbation du premier ordre et qu'il n'est valide qu'au voisinage d'une résonance unique. Proche d'un nœud de résonances, les largeurs de résonances peuvent se recouvrir et la dynamique est toute autre.

1.4.2 Acceptances et ouvertures

1.4.2.1 Définitions

L'*acceptance physique* est par définition l'aire de la plus grande ellipse que l'accélérateur accepte (cf. Eq. 1.72) :

$$A_u = \left[\pi \frac{a_u(s) - |\eta_u(s)\delta|^2}{\beta_u(s)} \right]_{min} \quad \text{avec } u = x, y \quad (1.87)$$

et $a_u(s)$, la *demi-ouverture physique* et $\eta_u(s)$ la dispersion locale.

L'*acceptance dynamique* est définie comme la plus grande région de l'espace des phases (dimension 6) à l'intérieur de laquelle les trajectoires de particules sont bornées, ceci en ne considérant que la dynamique d'une particule isolée. Restreinte à l'espace transverse, on parle d'*ouverture dynamique*, restreinte à la dynamique longitudinale, d'*acceptance en énergie ou RF*.

La détermination des dimensions de l'ouverture dynamique est fondamentale mais non triviale. Sa définition dépend du nombre de tours d'intégration des orbites. Par exemple Irwin (*in* Chao et Tigner, pp. 87–91) donne comme nombre de tours optimum, vingt-cinq pour cent du temps d'amortissement du faisceau, soit environ 1 000 tours pour des électrons. Cette limite est cependant trop faible pour étudier finement la dynamique à long terme (estimation de la diffusion, coefficients de Lyapunov), car les trajectoires des particules peuvent diverger aussi bien au bout d'un très faible nombre de tours (diffusion rapide) que lentement (diffusion d'Arnold) comme nous le verrons plus tard. La définition de l'ouverture dynamique dépend aussi des phases auxquelles elle est tracée (généralement $x' = y' = 0$), car les orbites se déforment.

Un problème ouvert est actuellement la recherche d'un facteur de qualité pour l'optimisation de l'ouverture dynamique (voir Todesco, 1999).

1.4.2.2 Un schéma d'optimisation de l'ouverture dynamique

De par les nonlinéarités, il n'existe pas de méthode analytique générale pour optimiser l'ouverture dynamique. Je présente ici le processus empirique d'optimisation d'une maille utilisé pour le Projet SOLEIL (Nghiem *et al.*, 1997); c'est un processus en quatre étapes :

La première étape consiste à choisir un point de fonctionnement dans une région du diagramme des nombres d'ondes (cf. Fig. 1.6) où non seulement, une émittance faible peut être obtenue mais aussi où il y a un minimum de résonances systématiques. Il est en particulier primordial d'éviter la proximité (a) des résonances d'ordres entiers qui sont excitées par les erreurs d'orbite fermée; (b) des résonances d'ordres demi-entiers qui sont excitées par les erreurs de gradients quadripolaires; (c) des résonances sommes pour éviter l'amplification mutuelle des oscillations bétatrons horizontales et verticales; (d) des résonances du troisième ordre qui sont introduites par les hexapôles. Ces critères permettent d'obtenir une ouverture dynamique peu sensible aux défauts magnétiques et à l'introduction des insertions.

La deuxième étape concerne l'optimisation des fonctions bétatrons¹⁰ : (a) la fonction β_x doit être minimum dans les dipôles pour obtenir une faible émittance; (b) la création de hautes brillances issues des insertions contraint la fonction β_y ; (c) le rapport β_{max}/β_{min} doit être minimum pour l'injection du faisceau; de plus les fonctions bétatrons ne doivent pas être trop grandes pour éviter d'avoir une sensibilité trop importante aux erreurs magnétiques. Il est également souhaitable de conserver la symétrie la plus élevée possible.

La troisième étape est le positionnement des hexapôles dans la maille. Les forces hexapolaires doivent être les plus faibles possibles, car elles limitent l'ouverture dynamique. Les hexapôles sont placés dans les régions à grande dispersion où les fonctions β_x et β_y sont découplées (Eq. 1.79).

La quatrième et dernière étape est dédiée à la correction de la chromaticité et l'optimisation de l'ouverture dynamique proprement dit. Seule l'ouverture dynamique *on momentum* ($\delta = 0$) est optimisée. La minimisation des résonances hexapolaires d'ordre 3 est fondée sur une méthode analytique du premier ordre (voir la thèse de Audy, 1989).

¹⁰Les fonctions bétatrons et les nombres d'ondes sont reliés par la relation intégrale 1.62.